

# Podejścia do realizacji modelu obliczeń kwantowych

Krzysztof Dryś, Paweł Laskoś-Grabowski

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

6 listopada 2008

# Jak reprezentować qubit?

## Zły qubit – moneta

Moneta jest dobrym bitem (ma dwa stany – orła i reszkę), ale złym qubitem – nie może przebywać długo w stanie superpozycji.

## Dobry qubit – spin cząstki

Dobrym qubitem jest spin – pewna wewnętrzna charakterystyka kwantowa cząstki o dyskretnym widmie. Może on się utrzymywać w stanie superpozycji przez wiele dni; za to jest trudny do dokładnego zmierzenia w świecie makroskopowym.

Należy szukać rozwiązań pośrednich.

# Co chcemy osiągnąć?

## Czas dekoherencji

Każdy układ kwantowy pod wpływem zewnętrznych szumów i zakłóceń po pewnym czasie staje się nieużyteczny dla obliczeń. Ten czas nazywamy czasem dekoherencji. Wszystkie obliczenia, jakie chcemy wykonać za pomocą komputera kwantowego, muszą zakończyć się przed upływem tego czasu. Różne realizacje modelu pozwalają na wykonanie różnych ilości operacji, od  $10^3$  do  $10^{14}$ .

To wszystko oznacza, że zamiast zastanawiać się *jak* zbudować komputer kwantowy, należy pytać, *jak dobry* komputer kwantowy uda nam się zbudować.

# Reprezentacja informacji

## Bity a qubity

Reprezentacja informacji klasycznej jest prosta – 1 = prąd płynie, 0 = prąd nie płynie. Dla obliczeń kwantowych należy opracować reprezentację, która pozwoli (sensownie długo) utrzymywać stan superpozycji 0 i 1.

## Stany własne... czegoś

Można wybrać własność fizyczną, której stany własne tworzą widmo dyskretne, i wybrać dwa (cztery, osiem...) z nich do reprezentowania jednego (dwóch, trzech...) qubitów. Własności o widmie ciągłym (położenie) są bezużyteczne, gdyż wpływ świata zewnętrznego może wypaczyć wyniki obliczeń.

# Transformacje unitarne układu

## Ewolucja czasowa a stan qubitów

Żeby obliczenia miały sens, operator ewolucji czasowej nie może w istotny sposób zmieniać stanu układu. Oznacza to, że operacje unitarne muszą mieć „podobne” widmo do hamiltonianu układu.

## Modyfikacja wybranych qubitów

Przede wszystkim jednak musimy zapewnić możliwość wykonywania tych operacji na jednym lub dwóch *konkretnych* qubitach – bo taka jest logika konstrukcji naszych układów. Istotna dla nas jest implementacja bramek Hadamarda i CNOT.

# Stan początkowy i pomiar wyniku

## Przygotowanie stanu początkowego

Zawsze zakładaliśmy, że obliczenia zaczynamy w dokładnie określonym stanie początkowym. W praktyce jest to awykonalne – stan początkowy możemy przygotować tylko z pewną dokładnością.

## Pomiar wyniku

Pomiar oznacza zebranie informacji o układzie, a jego dokładność zależy od użytych instrumentów pomiarowych. Zauważmy, że pomiar może zostać wykonany tylko po zakończeniu obliczeń, gdyż powoduje kolaps stanu układu.

# Spin

## Co to jest?!

Spin to jedna z kwantowych własności cząstek. Często określa się go mianem „wewnętrznego momentu magnetycznego”. Mogłoby się wydawać, że powstaje wskutek wewnętrznego ruchu ładunków w cząstce, jednak jest również własnością cząstek elementarnych oraz bezmasowych. Co jeszcze dziwniejsze, spin jest zawsze całkowitą wielokrotnością  $1/2$ .

# Spin cząstek

## Cząstki o spinie połówkowym – fermiony

Spiny tych cząstek są nieparzystymi wielokrotnościami  $1/2$ .  
Szczególnie interesujące (z punktu widzenia obliczeń kwantowych)  
mogą być cząstki (takie jak elektrony) o spinie  $\pm 1/2$ .

## Cząstki o spinie całkowitym – bozony

Innym interesującym przypadkiem jest foton, bezmasowa cząstka o spinie  $\pm 1$  (nie ma spinu  $0$ ). Z klasycznego punktu widzenia odpowiada to polaryzacji światła.

# Oscylator harmoniczny

## Typowe zagadnienie kwantomechaniczne

Ulubiony obiekt każdego studenta piątego semestru fizyki to kwantowa cząstka w potencjale parabolicznym ( $V = m\omega^2 x^2/2$ ). Stany własne tego zagadnienia,  $|n\rangle$ , mają energię  $\hbar\omega(n + 1/2)$ .

# Oscylatorowy komputer kwantowy?

## Reprezentacja qubitu

Dwa qubity możemy reprezentować następująco:

$$|00\rangle_L = |0\rangle$$

$$|01\rangle_L = |2\rangle$$

$$|10\rangle_L = (|4\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|11\rangle_L = (|4\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$$

## Operacja CNOT

W tej reprezentacji operator ewolucji czasowej o  $\pi/\hbar\omega$  ( $|n\rangle \rightarrow (-1)^n|n\rangle$ ) jest implementacją bramki CNOT.

# Nie jest tak łatwo

## Nie-cyfrowa reprezentacja

$n$  qubitów zakodowanych w  $2^n$  poziomach energetycznych to reprezentacja analogowa – jak jeden rejestr („ $2^n$ -it”) zamiast  $n$  bitów. Ponadto wymaga energii rzędu  $2^n \hbar\omega$ , a nie  $n \times \hbar\omega$ .

# Fotonowy komputer kwantowy

## Zarys

Reprezentacja qubitu lokalizacja pojedynczego fotonu w jednym z dwóch „przewodów”

Operacje unitarne klasyczne urządzenia optyczne, ośrodki Kerrowskie

Stan początkowy pojedyncze fotony światła laserowego

Odczyt wyniku detekcja pojedynczych fotonów

# Reprezentacja dwuprzewodowa

Wyobraźmy sobie pojedynczy foton i dwie wnęki. Stan, w którym foton znajduje się w którejś z nich, oznaczmy odpowiednio  $|01\rangle$  i  $|10\rangle$ . Superpozycje tych stanów,  $a|01\rangle + b|10\rangle$ , będą dla nas wygodną reprezentacją qubitów, którą nazwiemy „dwuprzewodową” (dual-rail).

# Operacje unitarne

## Zmiana fazy

Zmiana fazy jest realizowana podczas przejścia fotonu przez płytkę o grubości  $l$  z materiału o współczynniku  $n \neq n_0$ . Otrzymujemy następujące wzory:

$$P|0\rangle = |0\rangle$$

$$P|1\rangle = e^{i(n-n_0)L/c_0}|1\rangle$$

# Operacje unitarne

## Rozszczepienie promienia

Rozszczepienie promienia uzyskujemy przez przepuszczenie fotonu przez posrebrzaną płytkę. Współczynniki superpozycji po tej operacji są następujące:

$$a_{out} = a_{in} \cos \theta + b_{in} \sin \theta$$

$$b_{out} = -a_{in} \sin \theta + b_{in} \cos \theta$$

A zatem operator ma w naszej reprezentacji postać

$$B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

# Optyka niegeometryczna

## Efekt Kerra

Niektóre materiały zmieniają swój współczynnik załamania w zależności od natężenia światła padającego:

$$n(I) = n + n_2 I$$

## Ośrodki Kerrowskie

Przepuszczenie fotonu przez ośrodek Kerrowski równoważne jest następującej operacji unitarnej:

$$\begin{aligned} K|00\rangle &= |00\rangle & K|01\rangle &= |01\rangle \\ K|10\rangle &= |10\rangle & K|11\rangle &= e^{i\chi L}|11\rangle \end{aligned}$$

Używa się  $L$  takich, że  $\chi L = \pi$ , czyli  $K|11\rangle = -|11\rangle$ .

# Bramka CNOT

Operując na dwóch qubitach w bazie

$$\begin{aligned} |e_{00}\rangle &= |1001\rangle & |e_{01}\rangle &= |1010\rangle \\ |e_{10}\rangle &= |0101\rangle & |e_{11}\rangle &= |0110\rangle \end{aligned}$$

otrzymujemy bramkę CNOT jako złożenie operacji

$$U_{CN} = (I \otimes H)K(I \otimes H)$$

## Wady i zalety

### Zalety

Udało nam się zaimplementować komputer kwantowy przy pomocy niezbyt skomplikowanych narzędzi ani szczegółowych teorii cząstek.

### Wady

Ośrodki Kerrowskie cechują się dużym współczynnikiem absorpcji – na jeden foton, który przejdzie odległość  $L$  w takim ośrodku, przypada 50, które zostaną pochłonięte. Sprawia to, że opisane rozwiązanie nie ma zastosowania praktycznego.

# Wnęka Fabry'ego-Perota

## Opis wnęki

Efekt, który zachodzi w ośrodkach Kerra, wynika ze specyfiki interakcji fotonu i atomu. Dlatego zamiast przepuszczać fotony przez płytkę Kerrowską można sprawić, by oddziaływały ze sobą za pośrednictwem atomu. Efekt, który się uzyskuje jest podobny do tego, który widzieliśmy w ośrodkach Kerrowskich. Jednak jego natura jest skomplikowana i dlatego nie zostanie tu opisany.

# Pułapka jonowa

## Zarys

Reprezentacja qubitu spin jądra atomu i kwanty drgań sieci atomów (fonony)

Operacje unitarne manipulacja stanów atomu za pomocą wiązki laserowej

Stan początkowy ochłodzenie atomów

Odczyt wyniku pomiar spinów atomowych

## Układ doświadczalny

Atomy są uwięzione w polu elektromagnetycznym (pomiędzy czterema równoległymi elektrodami). W układzie występują drgania termiczne, których kwanty nazywamy fononami. Fononu nie można przypisać do konkretnego atomu, jest on „własnością” całej sieci.

# Operacje unitarne

## Pojedynczy spin

Dobierając odpowiednią częstotliwość światła laserowego można zmienić spin pojedynczej cząstki. Można w ten sposób zaimplementować wykonanie bramki Hadamarda na  $i$ -tym atomie ( $H_i$ ).

## Operacje na spinie i fononie

Ponownie, odpowiednio dobrana częstotliwość światła laserowego może sprawić, że na spinie cząstki i fononie zostanie wykonana następująca operacja:

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Operacje unitarne

## Operacje na spinie i fononie

Impuls laserowy o kolejnej specyficznej częstotliwości pozwala na zamianę qubitów między atomem a fononem:

$$S_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Bramka CNOT

Kontrolowana operacja NOT między jonami  $j, k$ :

$$CNOT_{jk} = H_k(S_k)^{-1}C_jS_kH_k$$

# Odczyt

Istnieje wiele sposobów mierzenia stanu układu. Przykładowo, można zmierzyć spin atomu wystawiając go na działanie odpowiedniego światła laserowego i mierzenie jakim światłem świeci atom.

# Wady i zalety

## Wady

Superpozycja wielu spinów ma ograniczony czas życia. Ciężko przygotować układ składający się z wielu jonów.

## Zalety

Operacje między fononem i spinem atomowym są już praktycznie realizowalne. Wydaje się, że wszystkie trudności techniczne mogą być przezwyciężone.

# Nuklearny rezonans magnetyczny (NMR)

## Zarys

- Reprezentacja qubitu spin jądra atomowego w cząsteczce
- Operacje unitarne transformacje spinów wykonywane przez impulsy pola magnetycznego; oddziaływania między spinami dokonują się przez wiązania chemiczne
- Stan początkowy polaryzacja spinów przez umieszczenie w silnym polu magnetycznym
- Odczyt wyniku pomiar napięcia wyindukowanego przez moment magnetyczny w trakcie precesji

## Układ doświadczalny

Układ doświadczalny jest to próbówka roztworu związku chemicznego umieszczona w statycznym polu magnetycznym  $\vec{B}_1$ . Dodatkowo w układzie może być indukowane pole magnetyczne  $\vec{B}_2$  o dowolnym natężeniu, prostopadłe do  $\vec{B}_1$ . Qubity są reprezentowane przez atomy o spinie połówkowym w cząsteczkach.

# Operacje unitarne

## Refocusing

Podstawowe operacje między cząsteczkami dokonywane są na poziomie wiązań chemicznych. Można to kontrolować za pomocą procesu, zwanego *refocusing*. Załóżmy, że cząstka ewoluowała w pewien sposób w czasie od  $t_0$  do  $t_0 + \Delta t$ . Wtedy, jeżeli w chwili  $t_0 + \Delta t$  poddamy ją *refocusingowi* (który polega w istocie na wystawienie tej cząstki na działanie odpowiedniego pola magnetycznego), to w chwili  $t_0 + 2\Delta t$  cząstka znowu będzie w takim stanie jak w  $t_0$ . Innymi słowy, ta operacja cofa ewolucję czasową.

# Operacje unitarne

## Operacje na pojedynczych qubitach

Każdy z atomów, odpowiadających za poszczególne qubity, ma inną częstość własną. To pozwala wysyłać sygnały elektromagnetyczne adresowane do poszczególnych qubitów. W ten sposób można realizować przekształcenia na pojedynczych qubitach.

## Bramka CNOT

Złożenie operacji na pojedynczych qubitach i *refocusingu* pozwala stworzyć operację CNOT.

## Odczyt wyników algorytmów

Po wyłączeniu pola  $\vec{B}_2$  rejestruje się sygnał zaniku wyindukowanych momentów magnetycznych. Analiza fourierowska tego sygnału pozwala odtworzyć stan odpowiednich atomów w cząsteczkach. W rzeczywistych sytuacjach nie rejestruje się sygnału zaniku pochodzącego od jednej cząsteczki, ale od wszystkich cząsteczek w roztworze.

## Rzeczywisty odczyt wyników algorytmów

Zazwyczaj mierzenie przebiegało tak: wybieraliśmy obserwabłą  $A$ , której wartości własne to  $r_i$ , a odpowiadające im wektory własne to  $w_i$ . Wtedy pomiar w stanie  $\sum c_i w_i$  dawał z prawdopodobieństwem  $|c_i|^2$  wartość  $r_i$ . Ponawiając doświadczenie można zbadać wartości  $c_i$  w stanie  $\sum c_i w_i$ .

NMR jednak mierzy nie konkretną wartość własną, ale wartość oczekiwaną operatora  $A$ . Dlatego algorytmy kwantowe przeprowadzane za pomocą NMR wymagają modyfikacji.

# Kwantowe twierdzenie adiabacyjne

## Hamiltonian zależny od czasu

Cechy układu są opisywane hamiltonianem  $H$ . W szczególności  $H$  może być funkcją czasu. Znacząco komplikuje to problem ewolucji czasowej układu.

## Twierdzenie adiabacyjne

Założmy, że  $H$  zmienia się wolno. Wtedy układ znajdujący się w podstawowym stanie stacjonarnym  $H(0)$ , przeewoluuje (w czasie  $T$ ) do podstawowego stanu stacjonarnego  $H(t)$ .

# Co to znaczy „wolno”?

## Ograniczenia

Stany stacjonarne hamiltonianu  $H(t)$  muszą być dobrze odseparowane dla wszystkich  $t$ . Parametryzujemy ewolucję zmienną  $s \in \{0, 1\}$  i „czynnikiem opóźniającym”  $\tau(s)$ :

$$\frac{d}{ds}|\psi(s)\rangle = -i\tau(s)H(s)|\psi(s)\rangle$$

Warunek stosowalności tw. ( $g(s)$  – min. separacja WAW  $H(s)$ ):

$$\tau(s) \gg \frac{\left\| \frac{d}{ds} H(s) \right\|}{g(s)^2}$$

# Model obliczeń

## Zagadnienie minimalizacji funkcji

Założmy, że chcemy znaleźć minimum wielomianowej funkcji  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Zdefiniujmy hamiltonian początkowy i końcowy

$$H_0 = \sum_{z \in \{0,1\}^n} h(z) |\hat{z}\rangle \langle \hat{z}|$$

$$H_f = \sum_{z \in \{0,1\}^n} f(z) |z\rangle \langle z|$$

gdzie  $h(0^n) = 0$ ,  $h(z) \geq 1$  wpp; baza Hadamarda:  $|\hat{z}\rangle$  – słowa stanów  $|\hat{0}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ ,  $|\hat{1}\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ .

# Ewolucja

Zdefiniujmy zatem liniowo ewoluujący hamiltonian

$$H(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_0 + \frac{t}{T} H_f$$

gdzie  $T$  można dobrać tak duże, by spełniało założenie twierdzenia adiabacyjnego. Gdy  $f$  jest wielomianowa,  $\left\| \frac{d}{ds} H(s) \right\|$  również jest wielomianowe, stąd przyjmujemy  $T \gg g(s)^{-2}$ .

## Przykład – przyspieszenie algorytmu wyszukiwania

Dla wyszukiwanego słowa  $u$  mamy

$$H_0 = \sum_{z \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n\}} |\hat{z}\rangle \langle \hat{z}|$$

$$H_f = \sum_{z \in \{0,1\}^n \setminus \{u\}} |z\rangle \langle z|$$

Wtedy  $g(s) = \sqrt{1 + 4(1 - 2^{-n})(s^2 - s)}$ . Otrzymujemy więc

$$T = \int_0^1 \frac{ds}{g(s)^2} = O(\sqrt{2^n}) = O(\sqrt{N})$$

# Wnioski

- Model prawdziwie kwantowy (łamiemy klasyczne ograniczenia)
- ... ale jak go zrealizować w ogólności?
- Są zadania klasycznie wielomianowe, ale kwantowo-adiabacyjnie wykładnicze (układy, dla których separacja wartości własnych hamiltonianu jest wykładniczo mała)