Zadanie domowe z Logiki dla informatyków

Materiały do zajęć, nr 569

Paweł Laskoś-Grabowski

30 grudnia 2004

1 Treść

Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij równoliczność zbiorów $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2 Rozwiązanie

Niech funkcje $\phi\colon \mathbb{R} \to (0,1), \psi\colon (0,1) \to (0,1]$ będą zadane wzorami

$$\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x, \tag{1}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x = \frac{1}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N} \\ x & \text{w p. p.} \end{cases} \tag{2}$$

Funkcje te są bijekcjami, gdyż posiadają funkcje odwrotne $\phi^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \psi^{-1}\colon (0,1] \to (0,1)$

$$\phi^{-1}(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

$$\psi^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{gdy } x = \frac{1}{2^{n}}, n \in \mathbb{N} \\ x & \text{w p. p.} \end{cases} \tag{4}$$

Oczywiście, bijekcjami będą również ich „dwuwymiarowe” odpowiedniki $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to (0,1)^2$, $\Psi\colon (0,1)^2 \to (0,1]^2$, dane wzorami

$$\Phi(\langle x, y\rangle) = \langle \phi(x), \phi(y)\rangle, \tag{5}$$

$$\Psi(\langle x, y\rangle) = \langle \psi(x), \psi(y)\rangle, \tag{6}$$

z analogicznie zdefiniowanymi funkcjami odwrotnymi. Nazwijmy „segmentem” ciąg znaków postaci $\underbrace{00\ldots0}_{n}1, n \in \mathbb{N}$, i zauważmy następujący

Fakt 1. *Każda liczba $x \in (0,1]$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci nieskończonego (tj. zawierającego nieskończenie wiele jedynek) rozwinięcia dwójkowego. Każde takie przedstawienie w liczby $x \in (0,1]$ da się jednoznacznie rozłożyć na ciąg segmentów $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tak, że*

$$w = 0{,}s_1 s_2 s_3 \ldots \tag{7}$$

Jednoznaczność przedstawienia w postaci nieskończonego rozwinięcia wynika z własności systemów pozycyjnych. Istnienie przedstawienia w postaci pewnego rozwinięcia również; istnienie przedstawienia w postaci nieskończonego rozwinięcia gwarantuje fakt, że przedstawienia

$$w = 0{,}u1, \tag{8}$$

$$v = 0{,}u011\ldots \tag{9}$$

reprezentują tę samą liczbę. Rozważany podział rozwinięcia na segmenty wyznaczany jest przez kolejne wystąpienia w nim cyfry 1. Wobec powyższego możemy w poniższym zapisie utożsamić liczbę z jej nieskończonym rozwinięciem dwójkowym, oraz stwierdzić, że funkcja $\xi\colon (0,1]^2 \to (0,1]$ dana wzorem

$$\xi(\langle 0{,}s_1s_2s_3\ldots, 0{,}r_1r_2r_3\ldots\rangle) = 0{,}s_1r_1s_2r_2s_3r_3\ldots, \tag{10}$$

gdzie $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ to ciągi segmentów, jest bijekcją. (Funkcja $\xi^{-1}\colon (0,1] \to (0,1]^2$ dana wzorem

$$\xi^{-1}(0{,}s_1s_2s_3s_4\ldots) = \langle 0{,}s_1s_3\ldots, 0{,}s_2s_4\ldots\rangle \tag{11}$$

jest do niej odwrotna.)

Ostatecznie, funkcja

$$f = \phi^{-1}\psi^{-1}\xi\Psi\Phi \tag{12}$$

jako złożenie bijekcji jest szukaną bijekcją $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.