Elektrodynamika – lista 8

Paweł Laskoś-Grabowski

29 maja 2006

1 Zadanie

1.1 Treść

Niech Q_{ij} będzie momentem kwadrupolowym.

1. Pokazać, że $Tr(Q_{ij}) = 0$.
2. Kiedy Q_{ij} nie zależy od wyboru układu współrzędnych?

1.2 Rozwiązanie

1. Skoro $Q_{ij} = \sum_A e_A(3r_A^i r_A^j - \delta_{ij}\vec{r}_A^2)$, to

$$Q_i{}^i = g^{\sigma i}Q_{\sigma i} = -\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_A e_A(3r_A^i r_A^i - \delta_{ii}\vec{r}_A^2) = -\sum_A(3\sum_{i=1}^{3} r_A^i r_A^i - 3r_A^2) = 0. \tag{1}$$

2. Niech położenia ładunków w jednym układzie będą oznaczone $\vec{r}_A$, w drugim – $\vec{r}'_A$. Zauważmy, że dla pewnego wektora $\vec{a}$ zachodzi $\vec{r}'_A = \vec{r}_A + \vec{a}$. Przedstawmy zatem moment kwadrupolowy w układzie „primowanym” za pomocą wielkości z układu „nieprimowanego”:

$$\begin{aligned} Q'_{ij} &= \sum_A e_A(3r'^i_A r'^j_A - \delta_{ij}\vec{r}'^2_A) = \sum_A e_A(3(r_A^i + a^i)(r_A^j + a^j) - \delta_{ij}(\vec{r}_A + \vec{a})^2) = \\ &= \sum_A e_A(3r_A^i r_A^j - \delta_{ij}\vec{r}_A^2) + \sum_A e_A(3a^i a^j - \delta_{ij}\vec{a}^2) + \sum_A e_A(3(a^i r_A^j + a^j r_A^i) - 2\delta_{ij}\vec{a}\vec{r}). \end{aligned} \tag{2}$$

Za pomocą oznaczenia momentu dipolowego $\vec{d} = \sum_A e_A\vec{r}_A$, można napisać

$$Q'_{ij} = Q_{ij} + \sum_A e_A(3a^i a^j - \delta_{ij}\vec{a}^2) + 3(a^i d^j + a^j d^i) - 2\delta_{ij}\vec{a}\vec{d}. \tag{3}$$

Zauważamy, że $Q'_{ij} = Q_{ij}$ wtedy, gdy zerują się pozostałe wyrazy. Dzieje się tak zaś wtedy, gdy $\sum_A e_A = 0$ i $\vec{d} = 0$.

2 Zadanie

2.1 Treść

Obliczyć potencjał skalarny generowany przez dipol. Pokazać, że pole elektryczne generowane przez dipol jest postaci

$$\vec{E} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\frac{1}{R} \tag{4}$$

2.2 Rozwiązanie

By wyliczyć wkład dipola w potencjał skalarny, zbadamy rozwinięcie prawej strony równości

$$\phi = \sum_A \frac{e_A}{|\vec{R} - \vec{r}_A|} \tag{5}$$

w szereg Taylora przy założeniu $\vec{r}_A \ll \vec{R}$, a dokładnie jego drugi wyraz (pierwszy opisuje potencjał „monopolowy”, trzeci – kwadrupolowy itd.).

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \sum_A e_A \sum_{i=1}^{3} r_A^i \frac{\partial}{\partial r_A^i} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_A|}\bigg|_{\vec{r}_A=0} = -\sum_A e_A \sum_{i=1}^{3} r_A^i \frac{\partial}{\partial \rho^i} \frac{1}{|\vec{\rho}|}\bigg|_{\vec{\rho}=\vec{R}} = \\ &= \sum_A e_A \sum_{i=1}^{3} r_A^i \frac{R^i}{R^3} = \sum_A e_A \vec{r}_A \frac{\vec{R}}{R^3} = \vec{d}\frac{\vec{R}}{R^3}. \end{aligned} \tag{6}$$

Pokażemy teraz, że pole pochodzące od takiego potencjału ma szukaną postać.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}\frac{\vec{d}\vec{R}}{R^3} = -(\vec{d}\vec{\nabla})\frac{\vec{R}}{R^3} - \left(\frac{\vec{R}}{R^3}\vec{\nabla}\right)\vec{d}, \tag{7}$$

gdzie drugi składnik znika, ponieważ operator różniczkowy „nie działa” na $\vec{d}$. Jak wiemy, $-\frac{\vec{R}}{R^3} = \vec{\nabla}\frac{1}{R}$, co kończy dowód.

3 Zadanie

3.1 Treść

Znaleźć pole elektryczne generowane przez dipol w układzie sferycznym.

3.2 Rozwiązanie

Wyliczmy wartość wektora pola generowanego przez dipol, by potem wyrazić ją w układzie współrzędnych sferycznych.

$$\vec{E} = -(\vec{d}\vec{\nabla})\frac{\vec{R}}{R^3} = -(\vec{d}\vec{R}\vec{\nabla})\frac{1}{R^3} - \left(\frac{\vec{d}}{R^3}\vec{\nabla}\right)\vec{R}. \tag{8}$$

Wyliczymy teraz po jednej składowej każdego z operatorów, pozostałe obliczenia będą analogiczne.

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x = -3\frac{x}{R^5}, \tag{9}$$

$$d_x\frac{\partial}{\partial x}x = d_x, \tag{10}$$

zatem

$$\vec{E} = 3\vec{d}\vec{R}\frac{\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{d}}{R^3} = \frac{3(\vec{d}\vec{R})\vec{R}-\vec{d}R^2}{R^5}. \tag{11}$$

Przejdziemy teraz do układu współrzędnych sferycznych, zakładając dla uproszczenia, że wektor $\vec{d}$ skierowany jest wzdłuż osi $0z$, tj. $\vec{d}=(0,0,d)$:

$$\vec{R} = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \tag{12}$$

$$E_x = \frac{3}{R^5}dR_zR_x = \frac{3d}{R^3}\sin\theta\cos\phi\cos\theta, \tag{13}$$

$$E_y = \frac{3}{R^5}dR_zR_y = \frac{3d}{R^3}\sin\theta\sin\phi\cos\theta, \tag{14}$$

$$E_z = \frac{3}{R^5}dR_z^2 - \frac{d}{R^3} = \frac{d}{R^3}(3\cos^2\theta - 1). \tag{15}$$

4 Zadanie

4.1 Treść

Pokazać, że

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r\,\frac{\vec{j}(r)}{|\vec{R}-\vec{r}|} \tag{16}$$

spełnia równanie

$$\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{17}$$

Obliczyć $\vec{B}(\vec{R}) = \mathrm{rot}\,_R\vec{A}(\vec{R})$.

4.2 Rozwiązanie

Korzystając z faktu, że $\vec{j}$ nie zależy od $\vec{R}$ oraz z równości $\Delta\frac{1}{R} = 4\pi\delta^3(R)$ możemy napisać

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{c}\int d^3r\,\vec{j}(\vec{r})\Delta\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \frac{1}{c}\int d^3r\,\vec{j}(\vec{r})\delta^3(\vec{R}-\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{18}$$

By wyliczyć rotację $\vec{A}$, skorzystamy ze związku

$$\mathrm{rot}\,\phi\vec{v} = \phi\mathrm{rot}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\phi)\times\vec{v}, \tag{19}$$

w którym pierwszy człon wyzeruje się, ponieważ $\vec{j}$ nie zależy od $\vec{R}$.

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\int d^3r\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}\times\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{1}{c}\int d^3r\,\frac{\vec{R}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}\times\vec{j}(\vec{r}). \tag{20}$$

Jeśli przyjmiemy $\vec{r} \ll \vec{R}$, to ostatecznie możemy napisać

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \int d^3r \, \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3}. \tag{21}$$

5 Zadanie

5.1 Treść

Pokazać, że jeśli $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, to

$$\int d^3r \, j^k r^i R^i = \frac{1}{2} \int d^3r \, j^k r^i R^i - \frac{1}{2} \int d^3r \, j^i r^k R^i. \tag{22}$$

5.2 Rozwiązanie

Należy udowodnić, że

$$\int d^3r \, j^k r^i R^i = - \int d^3r \, j^i r^k R^i. \tag{23}$$

Napiszmy równość (wynikającą z prawa Leibniza)

$$\int d^3r \, \partial_l (r^k r^i j^l) R^i = \int d^3r \, \partial_l (r^k) r^i j^l R^i + \int d^3r \, r^k \partial_l (r^i) j^l R^i + \int d^3r \, r^k r^i \partial_l (j^l) R^i. \tag{24}$$

Lewa strona (na mocy prawa Gaussa) równa jest całce z prądu po powierzchni; ponieważ prąd na niej nie występuje, wynosi ona 0. Po prawej stronie zeruje się całka zawierająca $\partial_l(j^l) = \operatorname{div} \vec{j}$. W pozostałych dwu członach zastępujemy $\partial_m r^n = \delta_{mn}$, co oznacza, że pierwszy zeruje się za wyj. wyrazów $l = k$, drugi zaś za wyj. $l = i$, czyli ostatecznie

$$0 = \int d^3r \, r^i j^k R^i + \int d^3r \, r^k j^i R^i, \tag{25}$$

co kończy dowód.

6 Zadanie

6.1 Treść

Pokazać, że jeśli potencjał wektorowy zlokalizowanego prądu

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \tag{26}$$

gdzie moment magnetyczny

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r \, \vec{r} \times \vec{j}, \tag{27}$$

to

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R} - \vec{m} R^2}{R^5} \tag{28}$$

jest polem magnetycznym generowanym przez ten prąd.

6.2 Rozwiązanie

By wyliczyć $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, skorzystamy z tożsamości

$$\mathrm{rot}\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a}\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\mathrm{div}\,\vec{a}. \tag{29}$$

Ponieważ operatory różniczkowe nie działają na $\vec{m}$, w naszym przypadku pozostaną tylko dwa człony

$$\mathrm{rot}\,\frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} = \vec{m}\mathrm{div}\,\frac{\vec{R}}{R^3} - (\vec{m}\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}. \tag{30}$$

Ponieważ $\frac{\vec{R}}{R^3}$ jest gradientem pewnego skalara $(-R^{-1})$, to jego dywergencja zeruje się. Ostatecznie pozostaje nam do policzenia wyrażenie identyczne (z dokładnością do oznaczeń $\vec{d}, \vec{m}$) jak w (8), więc wynik przepiszmy z (11):

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m}\vec{R})\vec{R} - \vec{m}R^2}{R^5}. \tag{31}$$