

Geometria obliczeniowa — lista 5, zadanie 4

Paweł Laskoś-Grabowski

11 stycznia 2007

1 Treść

Podać liniowy algorytm 3DUNBOUNDEDLP(H, \vec{c}), który sprawdza, czy podany przykład programu liniowego w 3 wymiarach jest nieograniczony i zwraca jedną z trzech odpowiedzi: (A) przykład jest sprzeczny, tzn. $\bigcap H = \emptyset$, (B) przykład jest nieograniczony i wskazuje półprostą $\vec{p} \subseteq \bigcap H$ nieograniczoną w kierunku \vec{c} lub (C) przykład jest ograniczony (lub sprzeczny) i wskazuje ograniczony przykład $(\{h_1, h_2, h_3\}, \vec{c})$, gdzie $h_1, h_2, h_3 \in H$.

2 Rozwiązanie

Rozwiązanie jest nieco inne, niż zaprezentowane na ćwiczeniach, za to poprawniejsze i przejrzystsze. Główna zmiana polega na tym, że najpierw wybieramy najbardziej płaski sufit, a następnie badamy dozwolone kierunki półprostych na tym suficie (patrz pkt. 1 Uwag). Najpierw przypomnijmy terminologię:

Góra – kierunek wektora celu.

Poziomy – prostopadły do góry.

Sufit – półprzestrzeń leżąca poniżej swej płaszczyzny ograniczającej.

Podłoga – półprzestrzeń nie będąca sufitem.

Bardziej/mniej płaski/stromy – określenia metajęzyka oznaczające relacje pomiędzy półprzestrzeniami, zdefiniowane porządkiem liczbowym na modułach iloczynów skalarnych jednostkowych wektorów normalnych do płaszczyzn ograniczających półprzestrzenie z wektorem celu.

Pierwszy przebieg algorytmu służy jedynie znalezieniu najbardziej płaskiego sufitu (jeśli jest kilka równoległych, bierzemy najniższy z nich, jeżeli jest kilka nierównoległych – dowolny). Wprowadzamy na t – płaszczyźnie go ograniczającej – biegunowy układ współrzędnych o dowolnym początku i osi skierowanej zgodnie z rzutem wektora celu na t . Szukamy dozwolonych kierunków półprostych nieograniczonych leżących na t – przed drugim przebiegiem algorytmu wynosi on $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (bo półproste skierowane „w dół” na t nie są nieograniczone w kierunku wektora celu).

W drugim przebiegu algorytmu przeglądamy wszystkie elementy H poza najbardziej płaskim sufitem. Dla każdej półprzestrzeni h rozpatrujemy ułożenie półpłaszczyzny $h \cap t$ na t (patrz pkt. 2 Uwag). Półpłaszczyzna ta ograniczona jest prostą o pewnym kierunku ϕ – zależnie od tego, po której stronie prostej leży półpłaszczyzna, aktualizujemy do ϕ (lub nie – aktualizacje mają tylko zawężać przedział) lewy lub prawy kraniec przedziału dozwolonych kierunków półprostych nieograniczonych. W przypadku aktualizacji zapa-

miętuujemy również h jako lewy lub prawy ogranicznik kierunku półprostych (co i kiedy należy dokładnie zaktualizować, staje się jasne po wykonaniu prostego rysunku). Jeśli po którejś iteracji przedział stanie się pusty, zwracamy oba ograniczniki i najbardziej płaski sufit (odpowiedź C).

Jeśli po przejrzaniu całego zbioru przedział jest niepusty, stwierdzamy, że problem jest nieograniczony, wybieramy półprostą t o kierunku z dozwolonego przedziału, i po raz trzeci przeglądamy H , by wyznaczyć pewien punkt początkowy półprostej leżącej w $\cap H$. Tak znaną półprostą zwracamy (odpowiedź B).

3 Uwagi

1. Jeśli problem jest ograniczony, to jedną ze zwróconych przez algorytm podprzestrzeni będzie najbardziej płaski sufit. Takie założenie jest do obronienia – wydaje się, że jeśli problem jest ograniczony, czyli istnieje w nim podproblem ograniczony mocy 3, to w takim podproblemie jedną z półprzestrzeni można wymienić na najbardziej płaski sufit, otrzymując podproblem ograniczony mocy 3. Piszę, że „wydaje się”, gdyż nie mam wystarczająco rozbudowanej wyobraźni przestrzennej, by się w tym ostatecznie utwierdzić.
2. $h \cap t$ nie musi być półpłaszczyzną. Może być całą płaszczyzną (wtedy odpowiednia iteracja nie wnosi zmian do zapamiętanych danych) lub być pusta. Oznacza to, że istnieje podłoga równoległa do najbardziej płaskiego sufitu, leżąca powyżej niego (odpowiedź A), lub równoległy do niego inny sufit (również najbardziej płaski) leżący poniżej. Ten drugi przypadek wykluczamy biorąc najniższy z rodziny najbardziej płaskich, równoległych sufitów.

Pojawia się także wątpliwość, jak algorytm ma zareagować dla H zawierającego np. tylko dwa sufity, których płaszczyzny ograniczające przecinają się w poziomej prostej; a dokładniej – jak w takim przypadku określamy ograniczoność półprostych w kierunku do góry. Jednak dookreślenie szczegółowych działań algorytmu w takim przypadku nie jest trudne.