Rozwiązanie Schwarzschilda równań Einsteina

Paweł Laskoś-Grabowski

9 lipca 2007

1 Oznaczenia i równania Einsteina

Jak wiemy, w czasoprzestrzeni o metryce $g^{\mu\nu}$, koneksja Levi-Civity dana jest wzorem

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right). \tag{1}$$

Tensor krzywizny Riemanna wyraża się następująco:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}, \tag{2}$$

zaś jego kolejne zwężenia, odpowiednio tensor krzywizny Ricciego i skalar krzywizny, to

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \qquad R = R^{\mu}_{\mu}. \tag{3}$$

Ostatecznie, równania Einsteina pola grawitacyjnego mają następującą postać:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

gdzie $\kappa = 8\pi G/c^4$ jest stałą Einsteina, a wielkość $T_{\mu\nu}$ to tensor energii-pędu, który dla ciał makroskopowych (o gęstości energii ϵ, ciśnieniu p oraz czteroprędkości u^{μ}) jest równy

$$T_{\mu\nu} = (p + \epsilon) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu}. \tag{5}$$

2 Wyprowadzenie metryki Schwarzschilda

W 1916 Karl Schwarzschild podał rozwiązanie równań Einsteina przy dodatkowych założeniach: sferycznej symetrii, stacjonarności i próżniowości pola. Najogólniejszym wyrażeniem na kwadrat interwału (które oczywiście zawiera *implicite* wyrazy tensora metrycznego, jako że $ds^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$), które jest niezmiennicze ze względu na odbicia przestrzenne $\theta \to -\theta$, $\phi \to -\phi$ jest

$$ds^2 = h\, dr^2 + k(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) + l\, dt^2 + a\, dr\, dt, \tag{6}$$

gdzie a, h, k, l są pewnymi funkcjami r, t. Ponieważ układ współrzędnych możemy dobrać dowolnie, by nie naruszać symetrii sferycznej, to ustalamy go na taki, w którym mamy

$$a = 0, \qquad k = -r^2. \tag{7}$$

Dla łatwości obliczeń wyrazimy pozostałe nieznane współczynniki przez h, l przez funkcje wykładnicze (gdzie f, g są pewnymi funkcjami r, t):

$$h = -e^f, \qquad l = c^2 e^g, \tag{8}$$

więc kwadrat interwału wygląda teraz (w obranym układzie współrzędnych) następująco:

$$ds^2 = e^g c^2\, dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) - e^f\, dr^2. \tag{9}$$

Gdy teraz oznaczymy ct, r, θ, ϕ odpowiednio przez $x^0, \ldots, x^3$, widzimy z powyższego wzoru, jakie wartości mają (różne od zera) diagonalne składowe tensora metrycznego i możemy obliczyć wartości wyrazów Christoffela dla tej metryki. Otrzymujemy (oznaczając primem pochodną po r, a kropką – po ct)

$$\begin{array}{rll} \Gamma^1_{11} = \frac{f'}{2}, & \Gamma^0_{10} = \frac{g'}{2}, & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{f}}{2}e^{f-g}, & \Gamma^1_{22} = -re^{-f}, & \Gamma^1_{00} = \frac{g'}{2}e^{g-f}, \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, & \Gamma^0_{10} = \frac{\dot{g}}{2}, \\ \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-f}. & \end{array} \tag{10}$$

Pozostałe składowe Γ są albo zerowe, albo równe którejś z powyższych na mocy ogólnych tożsamości dla symboli Christoffela.

Po wyliczeniu wartości tensora Ricciego można napisać równania Einsteina dla metryki powyższej postaci:

$$\kappa T^1_1 = -e^{-f}\left(\frac{g'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{11}$$

$$\kappa T^2_2 = \kappa T^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-f}\left(g'' + \frac{g'^2}{2} + \frac{g' - f'}{r} - \frac{g'f'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-g}\left(\ddot{f} + \frac{\dot{f}^2}{2} - \frac{\dot{f}\dot{g}}{2}\right), \tag{12}$$

$$\kappa T^0_0 = -e^{-f}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{f'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{13}$$

$$\kappa T^1_0 = e^{-f}\frac{\dot{f}}{r}. \tag{14}$$

Prawe strony równań dla pozostałych składowych są tożsamościowo równe zeru.

Łatwo rozwiązać powyższe równania na zewnątrz mas wytwarzających pole – wtedy wszystkie wyrazy tensora energii-pędu są równe zero i otrzymuje się następujące wnioski:

$$e^{-f}\left(\frac{g'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{15}$$

$$e^{-f}\left(\frac{f'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{16}$$

$$\dot{f} = 0. \tag{17}$$

Z sumy pierwszych dwóch równań widać, że $f' + g' = 0$, stąd $f + g$ jest funkcją wyłącznie czasu. Ponieważ pozostała jeszcze możliwość dowolnego przekształcania czasu, to można go określić tak, by $f + g = 0$. Ze scałkowania równania (16) otrzymamy

$$e^{-f} = e^g = 1 + C/r, \tag{18}$$

co pozwala nam na spostrzeżenie, że gdy $r \to \infty$, metryka staje się, zgodnie z oczekiwaniami, galileuszowska. C dobierzemy tak, by dla dużych odległości pole opisywało grawitację newtonowską z potencjałem ϕ, czyli

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \text{ gdzie } \phi = -\frac{GM}{c^2}, \tag{19}$$

zaś m jest masą ciała wytwarzającego pole. Wtedy C ma wymiar długości i nazywana jest promieniem grawitacyjnym:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \tag{20}$$

zaś ostatecznie kwadrat interwału jest postaci

$$ds^2 = (1 - r_g/r)c^2\,dt^2 - r^2(\sin^2\theta\,d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - r_g/r}. \tag{21}$$

Jak udowodnił w 1923 Birkhoff, każde sferycznie symetryczne rozwiązanie równań Einsteina w próżni musi być stacjonarne (w powyższych rozważaniach stacjonarność wyraża się w równaniu (17) i przyjęciu $f + g = 0$) oraz asymptotycznie galileuszowskie; oznacza to, że rozwiązanie Schwarzschilda jest jedynym spełniającym swe założenia.

3 Czarne dziury

Metryka Schwarzschilda ma osobliwości dla $r = 0$ oraz $r = r_g$. Ta druga wynika z doboru układu współrzędnych, gdyż np. w układzie współrzędnych Eddingtona-Finkelsteina interwał jest dobrze określony również w tym punkcie. Pierwsza osobliwość jest jednak osobliwością fizyczną (zw. osobliwością grawitacyjną), gdyż wielkości niezmiennicze, takie jak skalar Kretschmanna

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12r_s^2}{r^6} \tag{22}$$

dążą w jej okolicach do nieskończoności. Zrozumienie tej pozornej niefizyczności rozwiązania nie było natychmiastowe i wciąż budzi kontrowersje. Fizyczna interpretacja tego wyniku nosi nazwę czarnej dziury – jeśli promień ciała jest mniejszy, niż promień grawitacyjny, ciało pod wpływem kolapsu grawitacyjnego zapadnie się do osobliwości. Dla odległości $r < r_g$ czasoprzestrzeń ma bardzo interesujące własności – współrzędna czasowa ma charakter przestrzenny, a radialna – czasowy. Nie jest możliwa wymiana informacji między obszarami poniżej i powyżej horyzontu zdarzeń, czyli powierzchni $r = r_g$. Warto zauważyć, że to ostatnie zjawisko można przewidzieć w pełni klasycznie – klasyczna prędkość ucieczki dla ciała o promieniu r_s to prędkość światła.

Rozwiązanie Schwarzschilda jest tylko jednym, najprostszym, spośród czasoprzestrzeni przewidujących istnienie czarnych dziur. Metryka Kerra opisuje obracające się czarne dziury, zaś metryki Reissnera-Nordströma oraz Kerra-Newmana opisują odpowiednio spoczywające i obracające się czarne dziury obdarzone ładunkiem elektrycznym.

4 Ruch w metryce Schwarzschilda

Lagranżjan cząstki (której masa, m, uznawana jest za pomijalnie małą w stosunku do masy czarnej dziury M, i dlatego zaniedbywany jest jej wpływ na zakrzywienie czasoprzestrzeni) jest następujący (tu kropka oznacza różniczkowanie po τ):

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{m}{2}\left[-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\dot{t}^2) + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\dot{\phi}^2)\right]. \tag{23}$$

Z jego niezależności od t, ϕ wynika istnienie dwóch stałych ruchu:

$$r^2\dot{\phi} = L/m, \qquad (1 - r_g/r)\dot{t} = E/mc^2, \tag{24}$$

które po podstawieniu do (inaczej przedstawionej) definicji metryki Schwarzschilda

$$c^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 \tag{25}$$

daje następujące równanie orbity

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{m^2c^2} - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(c^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right), \tag{26}$$

lub po wyeliminowaniu zależności od czasu własnego

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4E^2}{c^2L^2} - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{r^4m^2c^2}{L^2} + r^2\right). \tag{27}$$

Dalsze wnioski dotyczące ruchu ciał w metryce Schwarzschilda pozwalają stwierdzić, że orbity kołowe ciał są stabilne dla $r > 3r_g$ i niestabilne dla $3r_g/2 < r < 3r_g$. Poniżej tej drugiej wartości granicznej (odpowiadającej orbicie o prędkości orbitalnej równej prędkości światła), cząstki swobodne spadają na horyzont zdarzeń. Relatywistyczna poprawka dla orbit eliptycznych przejawia się poprzez dłuższe pozostawanie (czyli spowolnienie ruchu) ciał w pobliżu perycentrum. Teoria przewiduje też precesję orbit eliptycznych o kąt

$$\delta\phi \approx \frac{6\pi GM}{c^2A(1-e^2)}, \tag{28}$$

na jeden obieg (gdzie A to półoś wielka, a e to mimośród orbity). To zjawisko zaobserwowano (jako odchylenie od przewidywanej przez klasyczny wpływ planet) precesji orbity Merkurego.

Literatura

[1] Lew Dawidowicz Landau, Jewgenij Michajłowicz Lifszyc, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1976.

[2] Alain J. Brizzard, *Lecture Notes in General Relativity*, Saint Michael's College, 2003.

[3] *Wikipedia, the free encyclopedia*, praca zbiorowa. Artykuły *Schwarzschild metric*, *Deriving the Schwarzschild solution*, *Kepler problem in general relativity* i pokrewne.