

# Wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a (**zad. P2.9**)

Paweł Laskoś  
grupa dr Pawła Woźnego, nr indeksu 169827

10 grudnia 2005

## 1 Wstęp

Celem eksperymentu było sprawdzenie związku między wskaźnikiem

$$K_n := \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|, \quad (1)$$

gdzie

$$\lambda_i(x) := \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

dla parami różnych węzłów interpolacji  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ , oraz dokładnością przybliżenia funkcji za pomocą wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a, w zależności od różnego sposobu wyboru węzłów. Przyjęto liczbę węzłów  $n = 10$ , przedział  $[a, b] = [-1, 1]$ , testowe funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad (3)$$

$$f_2(x) = \arctg x, \quad (4)$$

$$f_3(x) = \max\{0, 1 - 4x\}. \quad (5)$$

## 2 Opis teoretyczny

Zadanie interpolacji Lagrange'a sformułowane jest następująco (za [1, s. 2-3]): dla danych  $n \in \mathbb{N}$ , parami różnych  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  i dla danej funkcji  $f$  określonej w punktach  $\{x_i\}$  znaleźć wielomian  $L_n \in \Pi_n$  (stopnia najwyżej  $n$ ) taki, że

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad (6)$$

dla każdego węzła interpolacji  $x_i$ .

Łatwo udowodnić jednoznaczność takiego rozwiązania (różnica dwóch wielomianów interpolacyjnych  $L_n - L'_n$  jest wielomianem stopnia najwyżej  $n$ , o co najmniej  $n + 1$  zerach  $x_i$ , zatem jest równa 0), ponadto istnieje ono zawsze i jest dane wzorem

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_i(x). \quad (7)$$

Dla każdej funkcji i jej wielomianu interpolacyjnego zdefiniować można funkcję błędu

$$e_n := f - L_n, \quad (8)$$

i im mniejsze wartości ona osiąga, tym bardziej użyteczny jest wielomian interpolacyjny. Spróbujmy oszacować jej wartości takim wyrażeniem, którego jeden czynnik będzie zależny tylko od interpolowanej funkcji, drugi zaś – tylko od wyboru węzłów interpolacyjnych.

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &\leq |f(x)| + |L_n(x)| \leq |f(x)| + \sum |f(x_i)| |\lambda_i(x)| \leq \\ &\leq |f(x)| + \max_i |f(x_i)| \sum |\lambda_i(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| (K_n + 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Współczynnik  $K_n$  w pewien sposób ogranicza wartość funkcji błędu, jednak powyższe szacowanie jest na tyle grube, że ograniczenie staje się niewiele warte. Mimo to można spodziewać się pewnej korelacji między wartościami funkcji błędu a wartością współczynnika  $K_n$ .

### 3 Wyniki doświadczenia

Wszystkie poniższe wyliczenia i wykresy zostały wykonane za pomocą programu *Maple 9.5*, zapisane w załączonym arkuszu `inter.mw`.

Rozważania przeprowadzono dla trzech wyborów węzłów interpolacyjnych:

(a) węzłów równoodległych

$$x_i := \frac{2i + 1}{11} - 1. \quad (11)$$

(b) węzłów będących zerami jedenastego wielomianu Czebyszewa:

$$x_i := \cos\left(\frac{2i + 1}{22} \pi\right). \quad (12)$$

(c) losowo wybranych węzłów, tu (posortowane rosnąco):

$$\begin{aligned} x_0 &:= -0,7662364125, \\ x_1 &:= -0,6433701876, \\ x_2 &:= -0,6018926488, \\ x_3 &:= -0,3183845433, \\ x_4 &:= -0,1968105882, \\ x_5 &:= 0,005084617, \\ x_6 &:= 0,258959741, \\ x_7 &:= 0,472901968, \\ x_8 &:= 0,590788603, \\ x_9 &:= 0,650481577, \\ x_{10} &:= 0,983797135. \end{aligned} \quad (13)$$

Wykresy funkcji  $F_n(x) := \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|$  dla poszczególnych przypadków zamieszczone są na końcowych stronach tej pracy. Wartości współczynnika  $K_{10}$ , czyli maksima funkcji  $F_{10}$

na rozważanym przedziale  $[-1, 1]$ , przyjmowane są na krańcach przedziału (dla losowych węzłów – nie zawsze) i wynoszą

$$\begin{aligned}K_{10,(a)} &= 385,1601562, \\K_{10,(b)} &= 2,489430372, \\K_{10,(c)} &= 2211,667590.\end{aligned}\tag{14}$$

Zamieszczono także 9 wykresów funkcji błędu dla wszystkich badanych funkcji i zestawów węzłów interpolacji.

## 4 Wnioski

Korelacją, jaką zauważyć można między wykresami funkcji  $F_n(x)$  a poszczególnych funkcji błędu, jest fakt, że tam, gdzie funkcja  $F_n(x)$  przyjmuje wartości względnie duże (czyli dla  $x \notin (x_1, x_9)$  dla węzłów równoodległych,  $x \notin (x_0, x_9)$  dla węzłów losowych), tam również względnie duże wartości przyjmują funkcje błędu. Tam, gdzie  $F_n(x)$  przyjmuje wartości względnie małe (czyli dla  $x \in (x_1, x_9)$  dla węzłów równoodległych,  $x \in (x_0, x_9)$  dla węzłów losowych), tam też funkcje błędu mogą być ograniczane znacznie mniejszymi wartościami. Dla węzłów Czebyszewa funkcja  $F_n(x)$  przyjmuje na całym przedziale wartości „zrównoważone”, także funkcje błędu dla węzłów Czebyszewowskich nie mają żadnych wyróżniających się ekstremów lokalnych.

Można zauważyć, że dla wyżej wymienionych przedziałów „małej zmienności” funkcji  $F_n(x)$  wielomian interpolacyjny przy węzłach równoodległych czy losowych interpoluje zadaną funkcję podobnie dobrze jak przy węzłach Czebyszewa (a przy funkcji  $f_2$  zauważalnie lepiej). Kryterium współczynnika  $K_{10}$  faworyzuje węzły Czebyszewa, gdyż dla nich funkcja  $F_n(x)$  nie posiada pików, jednak dla konkretnych zastosowań (tj. wykorzystujących wartości funkcji tylko z przedziałów „małej zmienności”) mogą być lepsze inne doборы węzłów.

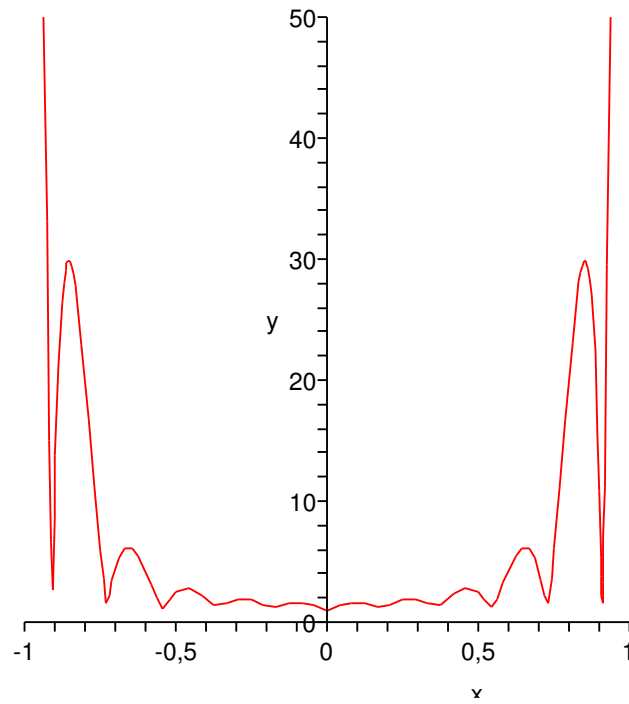
Wysnute wnioski skojarzyć można z twierdzeniem Rungego ([1, s. 5]), które mówi, że ciąg wielomianów interpolacyjnych funkcji  $f_1$  dla równoodległych węzłów zbieżny jest tylko dla  $|x| < 0,726 \dots$ . Można by się spodziewać, że ciąg  $F_n(x)$  dla równoodległych węzłów będzie również zbieżny tylko w tym przedziale.

## Literatura

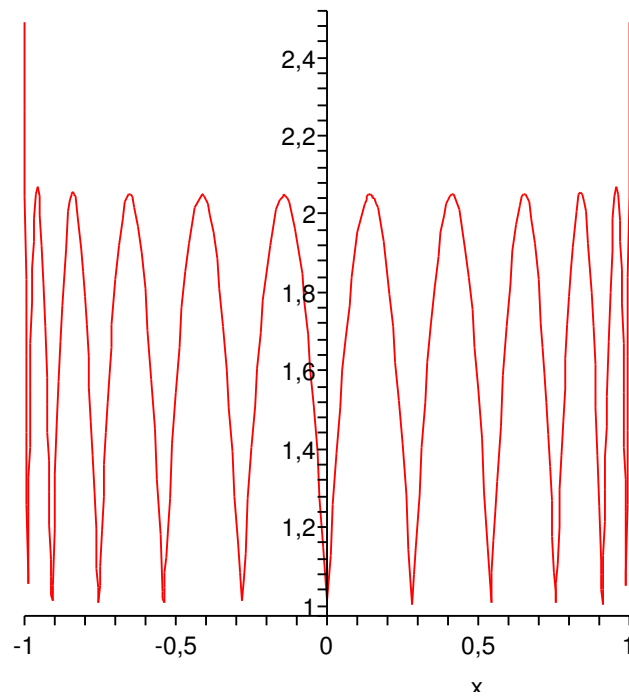
- [1] Stanisław Lewanowicz, *Interpolacja wielomianowa*, notatki do wykładu z analizy numerycznej, 2005<sup>1</sup>.

---

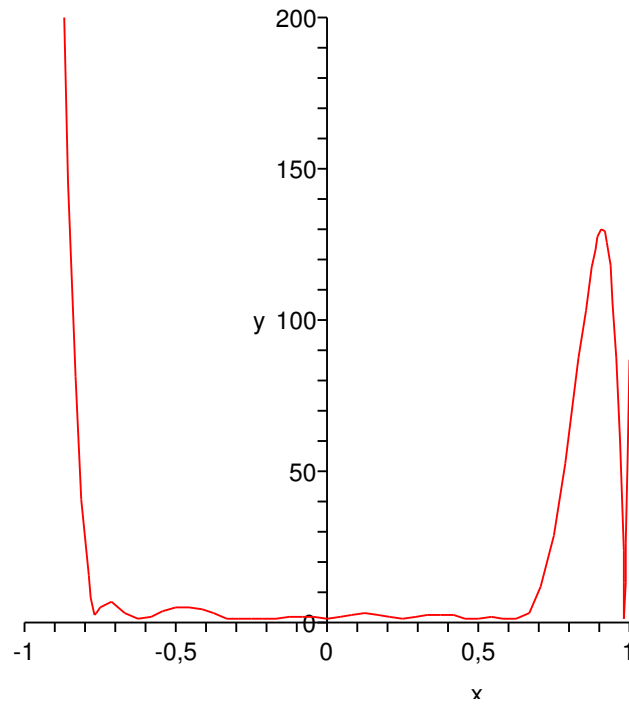
<sup>1</sup><http://www.ii.uni.wroc.pl/sle/an-inter.pdf>



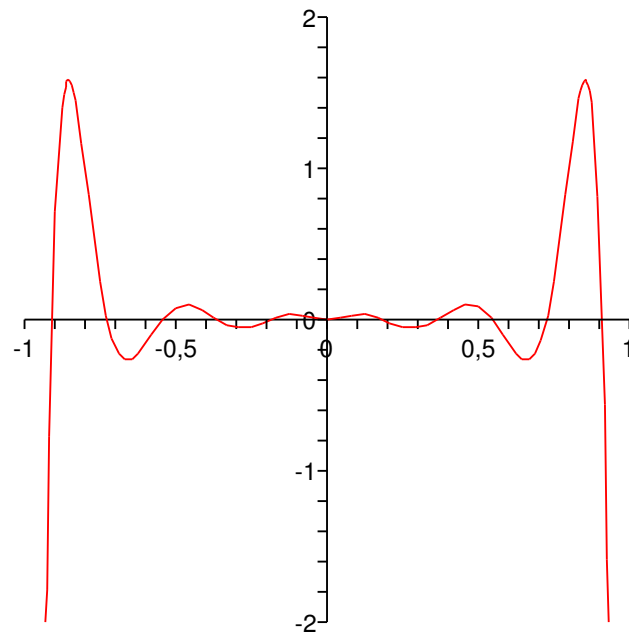
Rysunek 1: Wykres funkcji  $F_n(x)$  dla węzłów równoodległych



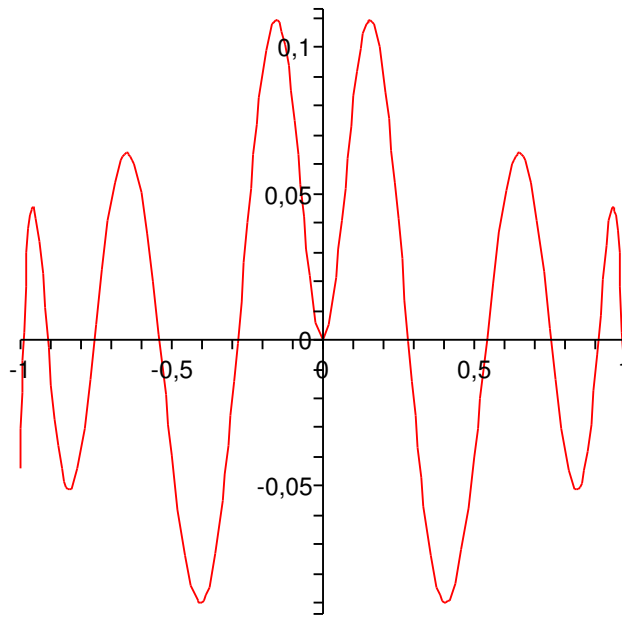
Rysunek 2: Wykres funkcji  $F_n(x)$  dla węzłów Czebyszewa



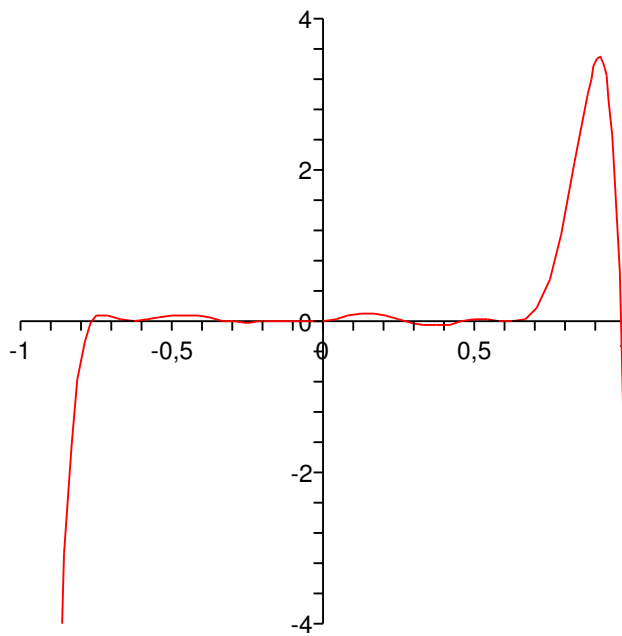
Rysunek 3: Wykres funkcji  $F_n(x)$  dla węzłów losowych



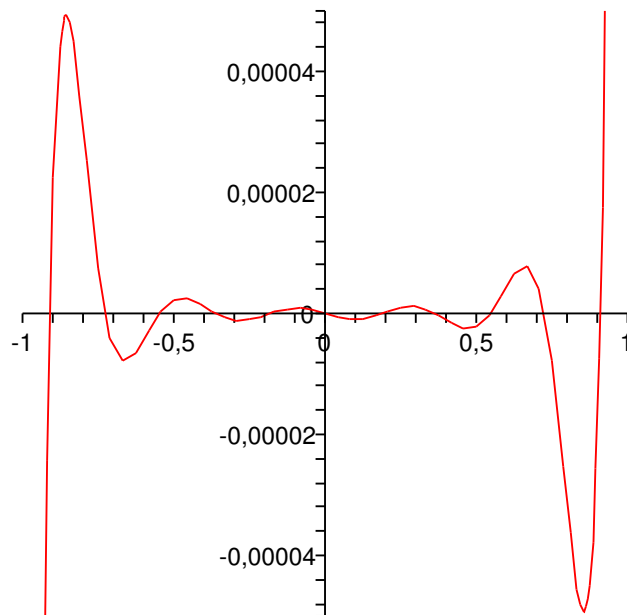
Rysunek 4: Wykres funkcji błędów dla  $f_1$  i węzłów równoodległych



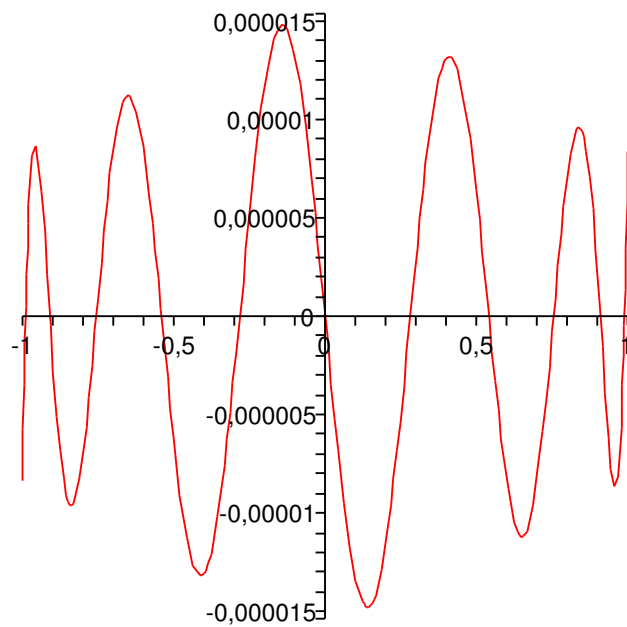
Rysunek 5: Wykres funkcji błędu dla  $f_1$  i węzłów Czebyszewa



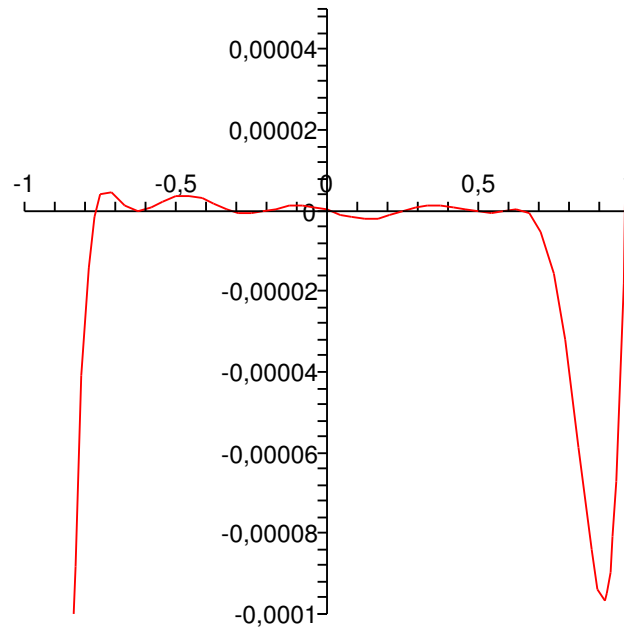
Rysunek 6: Wykres funkcji błędu dla  $f_1$  i węzłów losowych



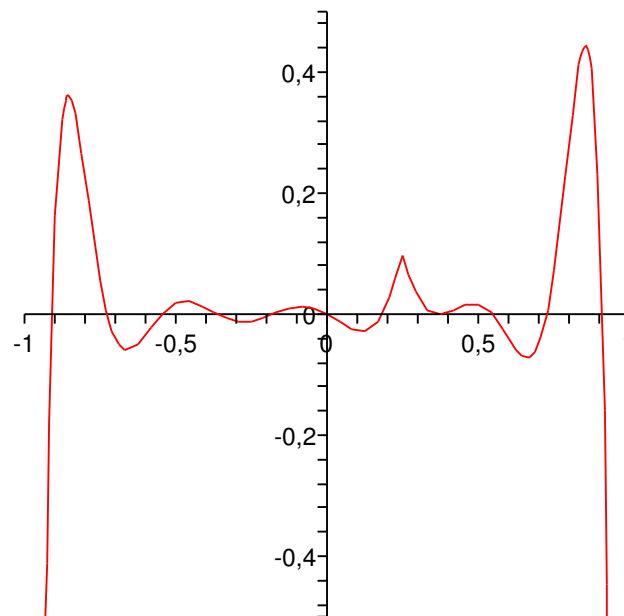
Rysunek 7: Wykres funkcji błędu dla  $f_2$  i węzłów równoodległych



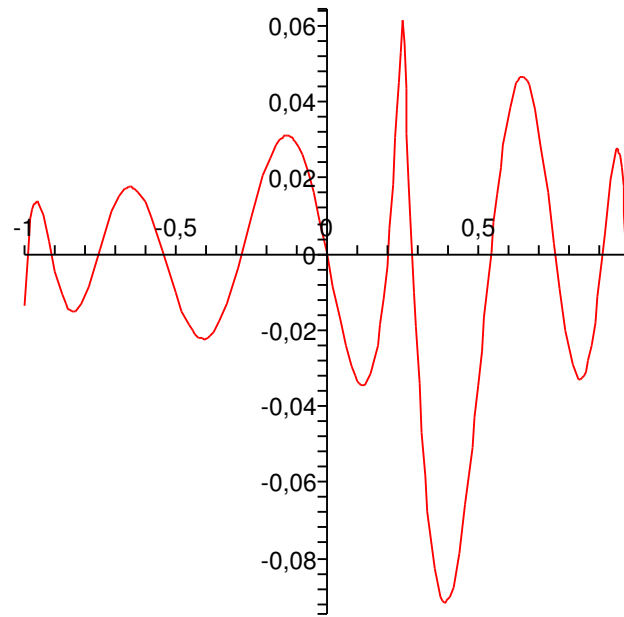
Rysunek 8: Wykres funkcji błędu dla  $f_2$  i węzłów Czebyszewa



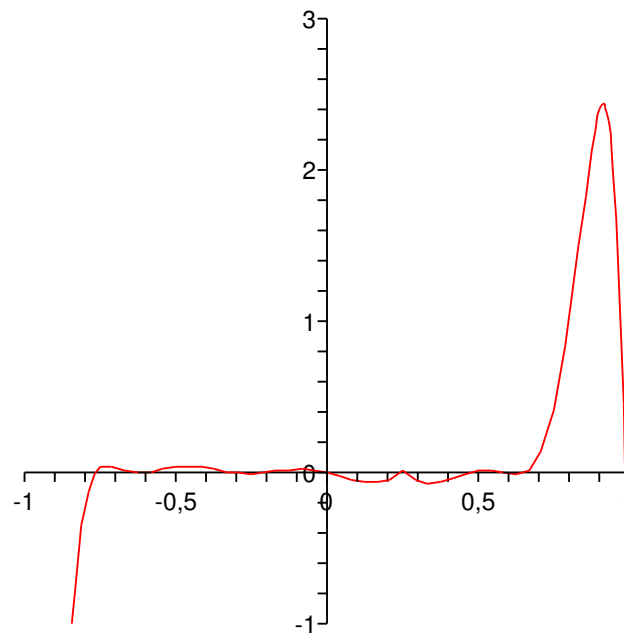
Rysunek 9: Wykres funkcji błędu dla  $f_2$  i węzłów losowych



Rysunek 10: Wykres funkcji błędu dla  $f_3$  i węzłów równoodległych



Rysunek 11: Wykres funkcji błędu dla  $f_3$  i dla węzłów Czebyszewa



Rysunek 12: Wykres funkcji błędu dla  $f_3$  i dla węzłów losowych