Paweł Laskoś
I rok fizyki ogólnej
poniedziałek, 10:30-12:45

23 maja 2005
prowadzący: dr Maria Błaszczyszyn

Ćwiczenie 5
Badanie drgań tłumionych

Przyrządy pomiarowe:

- Podziałka kątowa, służąca do pomiaru wychylenia, dokładność pomiaru $\Delta\alpha = 1°$
- Stoper, dokładność pomiaru $\Delta t = 0{,}01$s

Uwaga: zaparafowany oryginał zapisów pomiarów – w załączniku.

Pomiar 20 okresów ruchu:

- bez dociążenia: z małym tłumieniem 23,12s, z dużym tłumieniem 23,31s
- z dociążeniem 50g: z małym tłumieniem 25,81s, z dużym tłumieniem 25,87s

Odczyt kolejnych amplitud w ruchu z dużym tłumieniem:

bez dociąż.		z dociąż. jw.		
30	2	30	6	2,5
25	2	27	6	2,5
19	2	24	5,5	2,5
15	2	21	5	2
12	1,5	19	5	2
10	1,5	16	4,5	2
9	1,5	15	4,5	2
7	1,5	13,5	4	2
6	1	12	4	2
5	1	11	4	1,5
5	1	10	3,5	1,5
4	1	9,5	3,5	1,5
4	1	9	3,5	1,5
3	1	8,5	3	
3	1	8	3	
3	0,5	7,5	3	
2,5	0,5	7	3	
2		6,5	2,5	

Wyniki: bez dociążenia: $\lambda_b = 0{,}199(13)$, $\frac{\lambda_b}{T_b} = 0{,}171(11)\mathrm{s}^{-1}$, z dociążeniem $\lambda_z = 0{,}0894(55)$, $\frac{\lambda_z}{T_z} = 0{,}961(47)\mathrm{s}^{-1}$

Opis teoretyczny

Oscylatorem prostym nazywamy układ, którego ruch opisany jest równaniem różniczkowym $m\ddot{x} + kx = 0$. Rozwiązaniem tego równania jest

$$\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t + \delta) \\ \dot{x} &= A\omega\cos(\omega t + \delta) \\ \ddot{x} &= -A\omega^2\sin(\omega t + \delta), \end{aligned}$$

gdzie $\omega^2 = \frac{k}{m}$, okres ruchu $T = 2\pi\omega^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, a δ to przesunięcie w fazie. Ruchem harmonicznym porusza się wiele układów w technice, np. masy na sprężynach, tłoki w silnikach, jednak z racji istnienia oporu ośrodka (w de facto każdym przypadku) należy rozumieć je jako *oscylatory tłumione*, czyli układy o równaniu $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, gdzie człon $b\dot{x}$ reprezentuje siłę oporu ośrodka. Rozwiązaniem tego równania dla małych b jest

$$x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega' t + \phi),$$

gdzie $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ jest nową, mniejszą częstością kołową ruchu, zaś $A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$ to wygasająca w czasie amplituda. Dla $b > 2\sqrt{km}$ ruch traci swą periodyczność, zaś ciało wychylone w jedną stronę nie przekracza położenia równowagi.

Ruch tłumiony opisać możemy opisać kilkoma stałymi: np. logarytm ze stosunku kolejnych wychyleń w jedną stronę

$$\lambda = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln\frac{A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}}{A_0 e^{-\frac{b}{2m}t+T}} = \frac{bT}{2m}$$

nazywamy *logarytmicznym dekrementem tłumienia* i wyznaczymy go ze wzoru $\frac{bT}{2m} = \frac{1}{N}\ln\frac{A_n}{A_{n+N}}$ gdzie N to ilość okresów oddzielających wartości amplitud A_n, A_{n+N}. Jeśli powyższą wartość podzielimy przez okres T, otrzymamy *stałą tłumienia* $\frac{b}{2m}$.

W doświadczeniu mamy do czynienia z *wahadłem fizycznym* (tj. obracającym się ciałem sztywnym), nie zaś matematycznym, przypadki te jednak są z matematycznego punktu widzenia izomorficzne z dokładnością do oznaczeń i jednostek (tj. zamiast x mamy α, zamiast m – I).

Opis doświadczenia

Układ pomiarowy stanowi pręt na osi, z zamocowaną lekką kartonową powierzchnią, którą można ustawić na płaszczyznie ruchu (pomijalne tłumienie) lub prostopadle do niej (duże tłumienie). Na wolnym końcu pręta można dokręcić 50g obciążnik. Przeprowadzono pomiary 20 okresów ruchu dla wszystkich kombinacji kartonowego „żagla" (wzdłuż – w poprzek) i obciążnika (założony – brak). Prześledzono zmiany amplitudy przy dużym tłumieniu (raz z dociążeniem, raz bez), odnotowując kolejne wychylenia *w jedną stronę*.

Opracowanie wyników pomiarów

Do wyznaczenia wartości λ wezmę wartości następujących odczytów: pierwszego, tj. wychylenia początkowego, oraz pierwszego, który nie różni się od następnego. Dla pomiarów bez dociążenia będzie to $A_{10} = 5°$, z dociążeniem – $A_{19} = 6°$. W obu przypadkach

$A_1 = 30^\circ$ i $u(A) = 0{,}58^\circ$.

$$\lambda_b = \frac{1}{9}\ln\frac{A_1}{A_{10}} = \frac{1}{9}\ln\frac{30^\circ}{5^\circ} = 0{,}199 \quad \lambda_z = \frac{1}{18}\ln\frac{A_1}{A_{19}} = \frac{1}{18}\ln\frac{30^\circ}{6^\circ} = 0{,}0894$$

Ponieważ złożona niepewność standardowa wynosi tu

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial A_1}\right)^2 u^2(A_1) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial A_{1+n}}\right)^2 u^2(A_{1+n})} = \frac{u(A)}{n}\sqrt{\frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{A_{1+n}^2}}$$

to otrzymujemy

$$u(\lambda_b) = \frac{0{,}58^\circ}{9}\sqrt{\frac{1}{30^{\circ 2}} + \frac{1}{5^{\circ 2}}} = 0{,}013 \quad u(\lambda_z) = \frac{0{,}58^\circ}{18}\sqrt{\frac{1}{30^{\circ 2}} + \frac{1}{6^{\circ 2}}} = 0{,}0054.$$

Aby wyznaczyć stałą tłumienia, musimy wyznaczyć okresy, tj. podzielić zmierzone wartości przez 20: $T_b = 1{,}1655\mathrm{s}, T_z = 1{,}2935\mathrm{s}$, oraz ich niepewność, $u(T) = \frac{\Delta T}{20\sqrt{3}} = 0{,}0028\mathrm{s}$ przyjmując za $\Delta T = 0{,}1\mathrm{s}$, tj. standardowy czas reakcji obserwatora. Ponieważ

$$u\left(\frac{\lambda}{T}\right) = \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{T}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{T^2}u(T)\right)^2},$$

to ostatecznie otrzymamy

$$\frac{\lambda_b}{T_b} = 0{,}171\mathrm{s}^{-1} \quad \frac{\lambda_z}{T_z} = 0{,}0691\mathrm{s}^{-1}$$

$$u\left(\frac{\lambda_b}{T_b}\right) = 0{,}0111\mathrm{s}^{-1} \quad u\left(\frac{\lambda_b}{T_b}\right) = 0{,}0047\mathrm{s}^{-1}.$$

Wnioski

Trudno sprawdzić jakość otrzymanych wyników. Stała tłumienia z dociążeniem okazała się znacznie mniejsza niż bez – zgodnie z teorią, bo dokręcony ciężarek znacznie zwiększył moduł bezwładności wahadła. Tym niemniej należy wątpić w jakość doświadczenia, z kilku powodów – m. in. z powodu trudności w odczytywaniu amplitudy, ponieważ pomiar musiał być przeprowadzany bardzo szybko.