Paweł Laskoś
I rok fizyki ogólnej
poniedziałek, 10:30-12:45

25 kwietnia 2005
prowadzący: dr Maria Błaszczyszyn

Ćwiczenie 8
Badanie zjawiska rezonansu mechanicznego

Przyrządy pomiarowe:

- Podziałka kątowa, służąca do pomiaru wychylenia, dokładność pomiaru $\Delta\alpha = 1°$
- Stoper, dokładność pomiaru $\Delta t = 0{,}01$s
- Wbudowany w silnik licznik obrotów i stoper, dokładność pomiaru jw.

Uwaga: zaparafowany oryginał zapisów pomiarów – w załączniku.

Pomiary cz. I – czas dwudziestu swobodnych wahnięć:

seria	$20T_0$[s]	seria	$20T_0$[s]
1	21,88	6	21,91
2	21,94	7	21,85
3	21,84	8	22,09
4	21,88	9	21,87
5	21,94	10	21,78

Pomiary cz. II – maksymalne wychylenie w zależności od okresu siły wymuszającej:

$10T$[s]	α_{max}[°]	$10T$[s]	α_{max}[°]
8,507	2	$10{,}892 \approx 10T_0$	25
8,791	1,5	11,222	9
8,821	2	11,309	11
8,896	2	11,428	6
9,049	4	11,799	5
9,589	4	11,867	7
10,388	7	12,174	7
10,883	26		

Wyniki: częstość własna układu $\omega = 5{,}739(50)\text{s}^{-1}$.

Opis teoretyczny

Równanie różniczkowe *harmonicznego oscylatora prostego* $m\ddot{x} + kx = 0$ ma następujące rozwiązanie:

$$x = A\sin(\omega t + \delta)$$
$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

gdzie $\omega^2 = \frac{k}{m}$ i okres drgań $T = 2\pi\omega^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ zaś δ to przesunięcie fazowe. Jeśli na oscylator działać będzie siła oporu ośrodka, proporcjonalna (współczynnik b) do prędkości, lecz przeciwnie skierowana, mamy do czynienia z *oscylatorem tłumionym* o równaniu

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

którego rozwiązanie dla małych b będzie miało postać

$$x = Ae^{\frac{-bt}{2m}} \cos(\omega' t + \delta)$$

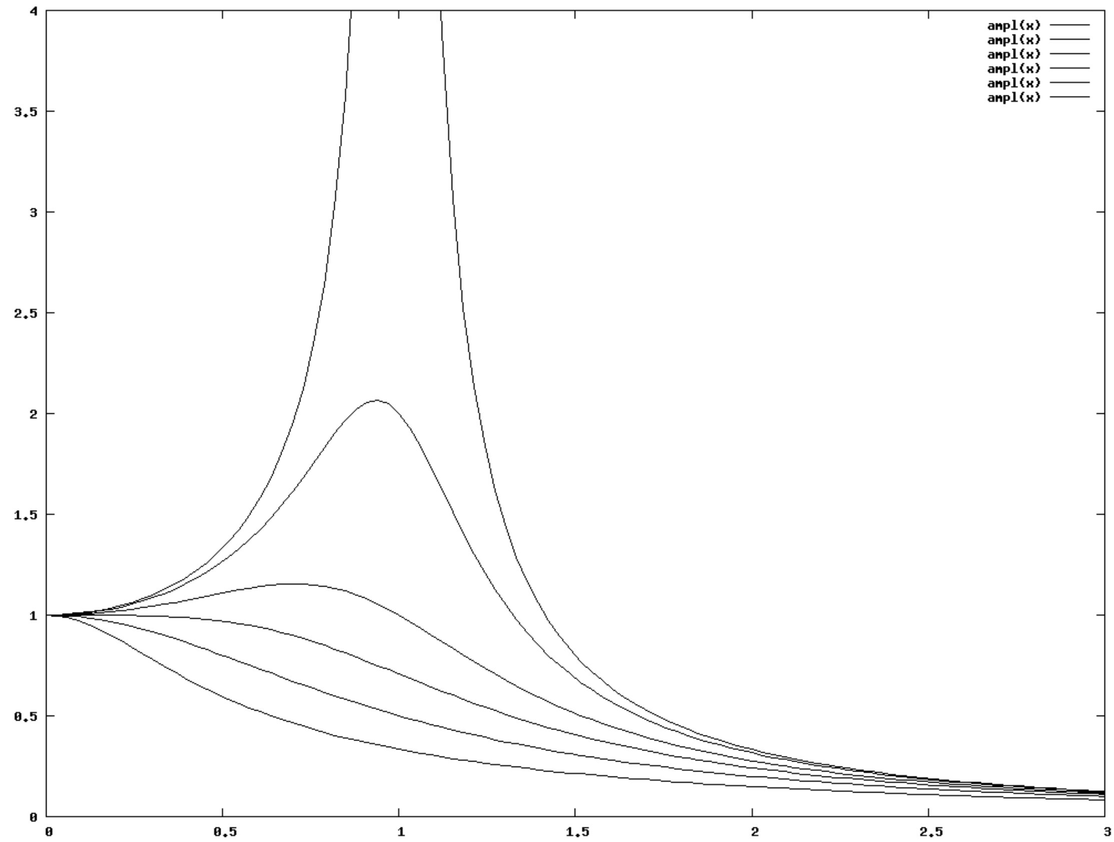
gdzie $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ jest zmodyfikowaną częstością kołową ruchu, zaś $Ae^{\frac{-bt}{2m}}$ jest malejącą wykładniczo amplitudą drgań. Jeśli zaś do oscylatora przyłożymy okresową siłę wymuszającą o wartości maksymalnej F i częstości ω'', otrzymamy równanie ruchu *oscylatora wymuszonego*

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F\cos(\omega'' t),$$

którego rozwiązaniem jest

$$x = \frac{F}{G}\sin(\omega'' t - \delta)$$

gdzie $G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}$ i w to *częstość własna układu.* Jakościową interpretację tej zawiłej zależności dobrze przeprowadzić jest w oparciu o załączony wykres, przedstawiający zależność amplitudy $\frac{F}{G}$ (wyrażonej wielokrotnościami $\frac{F}{k}$ od stosunku $\frac{\omega''}{\omega}$ dla różnych $b = \kappa m\omega$, dla $\kappa = 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 3$ odpowiednio dla krzywych od „najwyższej" do „najniższej".

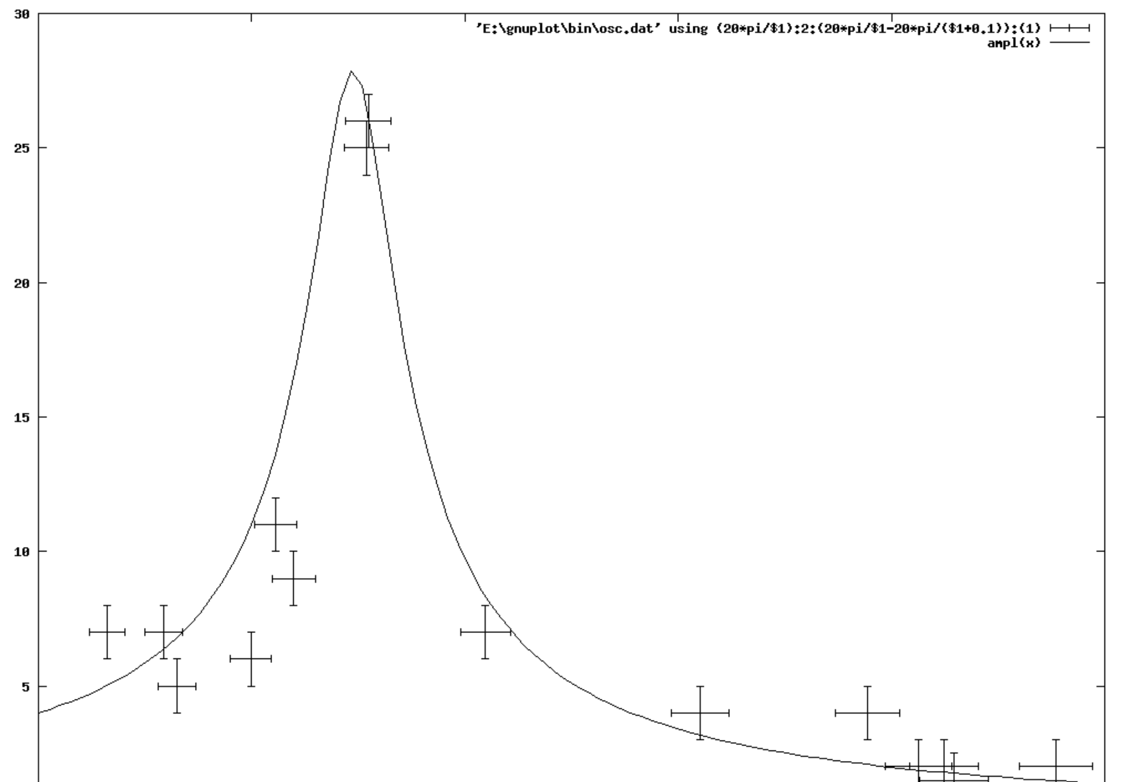


Należy zauważyć, że dla danego b maksymalna amplituda przypada na *częstość rezonansową* $\omega_r'' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$. Gdy tłumienie $b = 0$, $\omega_r = \omega$ i amplituda dąży do nieskończoności, co w praktyce oznacza, że układ zostaje rozerwany (spektakularne katastrofy mostów, stabilnych ze statycznego punktu widzenia, które „przypadkiem” miały nieodpowiednie ω i przy niewielkich podmuchach wiatru wpadały w drgania rezonansowe). Można zauważyć także, że przy dużym tłumieniu $b \geqslant \sqrt{2}m\omega$ częstość rezonansowa nie występuje.

Opis doświadczenia

Układ doświadczalny stanowi wahadło składające się z metalowego pręta, na którym zamontowano duży sześcian z gąbki (stosunkowo duże tłumienie przy małej masie). Jest to oscylator tłumiony, którego częstość własną wyznacza się w pierwszej części doświadczenia, dziesięciokrotnie mierząc czas dwudziestu okresów drgań wahadła. Do wahadła za pomocą sprężyn zamocowana jest ramka, którą w ruch posuwisto-zwrotny może wprawiać wysięgnik zamontowany do mimośrodowego koła silnika elektrycznego. W ten sposób przykładana jest do wahadła okresowa siła wymuszająca, której częstość regulować można pokrętłem sterującym silnika. Urządzenie wyposażone jest również w stoper i licznik obrotów. Dla kilkunastu różnych ustawień pokrętła (w tym jednym zbliżonym do częstości własnej wahadła) przeprowadza się pomiar czasu dziesięciu okresów ruchu, a także odczytuje się z zamontowanej pod wahadłem kątowej skali maksymalne wychylenie z położenia równowagi.

Opracowanie wyników pomiarów



Na podstawie danych uzyskanych w pierwszej części doświadczenia otrzymujemy średni czas 20 okresów drgań $u(20T_0) = 21{,}898$s, maksymalne odchylenie $\Delta(20T_0) = 0{,}192$s zanotowano w serii 8, zatem okres drgań $T_0 = 21{,}90(19)$s, częstość własna (kołowa) układu $\omega = 5{,}739(50)\mathrm{s}^{-1}$.

Na powyższym wykresie przedstawiono zależność wychylenia maksymalnego (α z tabeli pomiarów) od częstości kołowej siły wymuszającej $\omega'' = \frac{20\pi}{10T}$. Wysokość słupków błędów $\Delta\omega = \left|\frac{20\pi}{10T+\Delta T} - \omega\right|$ wyznaczono z niepewności pomiarowej czasu dziesięciu okresów, przyjmując standardowy czas reakcji obserwatora $\Delta T = 0{,}1s$. Wysokość słupków błędów $\Delta\alpha = 1^\circ$ czyli 1 podziałce skali. Linia ciągła to teoretyczny wykres amplitudy maksymalnej w zależności od ω'' dla dobranych ręcznie wartości F, m, ω, b.

Wnioski

Na wykresie widać słabe dopasowanie punktów pomiarowych do teoretycznej krzywej, zwłaszcza dla małych wartości ω''. Najistotniejszą przyczyną takiego stanu rzeczy jest niska jakość sprzętu – przede wszystkim wyświetlacza licznika czasu: na pięciocyfrowym wyświetlaczu nie działało około 10 diod LED, co zmuszało obserwatorów do odgadywania rzeczywistych wskazań miernika. Zarówno licznik czasu, jak i obrotów, miały niepomijalne opóźnienie w stosunku do naciśnięcia przycisku START lub STOP, co oznacza że dokładny pomiar częstości siły wymuszającej przy użyciu tych mierników jest niemożliwy.

Także skala kątowa umieszczona pod wahadłem nie nadawała się do poważnych pomiarów – wchodził w grę duży błąd odczytu z powodu paralaksy (duża odległość między wskazówką wahadła a skalą) i dużej grubości „wskazówki" (którą stanowiła stopka wahadła o grubości ok. 1cm). Po wykonaniu doświadczenia okazało się ponadto, że w położeniu równowagi wskazówka nie była w pozycji 0.

Ponadto mały zakres możliwych ustawień pokrętła regulacyjnego silnika uniemożliwił wykonanie pomiarów o większym rozstępie.