

Ćwiczenie 15

Drgania masy zawieszony na sprężynie

Przyrządy pomiarowe:

- Zestaw odważników, w tym dwa 10g, po jednym 20g, 50g, 100g.
- Stoper – niepewność pomiaru czasu $\Delta t = 0,01s$.
- Centymetr krawiecki – niepewność pomiaru długości $\Delta l = 0,1cm$.

Uwaga: zaparafowany oryginał zapisów pomiarów – w załączniku.

Pomiary cz. I – czas 20 okresów drgań sprężyny obciążonej odważnikiem 50g dla podanego wychylenia z położenia równowagi (pięciokrotnie powtórzono pomiary dla $x = 5cm$):

$x[cm]$	$t[s]$	$x[cm]$	$t[s]$	$x[cm]$	$t[s]$
1	22,06	5	22,15	6	22,44
2	22,28	5	22,28	7	22,53
3	22,22	5	22,22	8	21,94
4	22,31	5	22,34	9	22,41
		5	22,18	10	22,31

Pomiary cz. II – długość sprężyny w zależności od obciążenia:

zwiększane obciążenie				zmniejszane obciążenie			
$m[g]$	$l[cm]$	$m[g]$	$l[cm]$	$m[g]$	$l[cm]$	$m[g]$	$l[cm]$
0	21,5	60	41,5	0	21,7	60	41,8
10	24,7	70	44,9	10	25,0	70	45,3
20	28,1	80	48,2	20	28,4	80	48,5
30	31,4	90	51,4	30	31,6	90	51,8
40	34,9	100	54,9	40	35,2	100	55,2
50	38,3			50	38,5		

Pomiary cz. III – czas 20 okresów drgań w zależności od masy obciążenia (w tym dla nieznannej masy m_x):

seria	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40g	21,12	21,03	20,97	20,72	21,00	21,00	21,00	21,03	21,00	21,22
50g	pomiary wykonano w cz. I									
60g	23,25	23,37	22,87	23,54	23,60	23,06	23,47	23,66	23,59	23,66
70g	24,56	24,66	24,50	24,66	24,62	24,44	24,31	24,50	24,59	24,37
80g	25,62	25,59	25,63	25,53	25,62	25,41	25,53	25,35	25,56	25,65
90g	26,65	26,66	26,50	26,62	26,46	26,44	26,66	26,66	26,59	26,56
100g	27,56	27,62	27,50	27,53	27,41	27,56	27,25	27,53	27,62	27,56
m_x	24,59	24,50	24,57	24,50	24,50	24,25	24,91	24,41	23,97	24,28

Wyniki: Współczynnik sprężystości sprężyny $k = 2,9294(65) \frac{N}{m}$.

Wartość nieznaney masy $m_x = 0,69\text{kg}$.

Opis teoretyczny

Odształcenia materiałów pod wpływem działających sił wynikają z cząsteczkowej natury materii. Wykres przedstawiający miarę odształcenia w zależności od wartości sił jest liniowy od zera do pewnej wartości, po czym „ucieka” w górę, aż do momentu w którym następuje złamanie ciała. Przedział proporcjonalności nazywa się *obszarem elastycznym (sprężystym)*. Drugi przedział to *obszar plastyczny*, w którym odształcenia nie są już odwracalne.

Zależność w obszarze sprężystym spostrzegł w 1660 roku Robert Hooke, i sformułował prawo (zw. *prawem Hooke’a*) »*ut tensio sic vis*«, tj. siła jest proporcjonalna do przyłożonej siły. Dla pręta o przekroju S i długości L , wykonanego z materiału o *module Younga* (stała materiałowa) E , odształcenie pod wpływem siły F wynosi

$$\Delta L = \frac{LF}{ES}.$$

Najczęściej do badania odształceń używa się sprężyn, gdzie podstawowa zależność ma postać

$$F = -kx$$

(znak wynika z wektorowego charakteru siły i odształcenia) gdzie stała k charakteryzuje daną sprężynę. Poza obszarem sprężystości prawo już nie obowiązuje, a sprężyna odształciwszy się trwale, zmienia swoje k . Współczynnik ten zależy od promienia sprężyny R , drutu r , liczby zwojów n i modułu sztywności materiału G w następujący (wyznaczony empirycznie) sposób:

$$k = \frac{r^4 G}{4R^3 n}$$

przy czym moduł sztywności jest stałą materiałową, a wiąże go z modulem Younga wzór $E = 2G(r + 1)$ gdzie r jest współczynnikiem Poissona, czyli stosunkiem odształceń poprzecznych i podłużnych dla danego materiału.

Korzystając z równania $F = -kx$ i zasady zachowania energii (energia potencjalna sprężystości wyraża się wzorem $E = \frac{1}{2}kx^2$) możemy wyznaczyć równania ruchu

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \phi) \\v &= -A\omega \sin(\omega t + \phi) \\a &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

przy czym okres drgań $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}}$ dla masy ciężarka m i sprężyny m_s . Należy zauważyć, iż jest on niezależny od amplitudy drgań A .

Opis doświadczenia

Układ pomiarowy stanowi zawieszona na statywie sprężyna o masie 75g z zamocowaną szalką o masie 14,6g. Do szalki przymocowana jest pozioma wskazówka, za pomocą

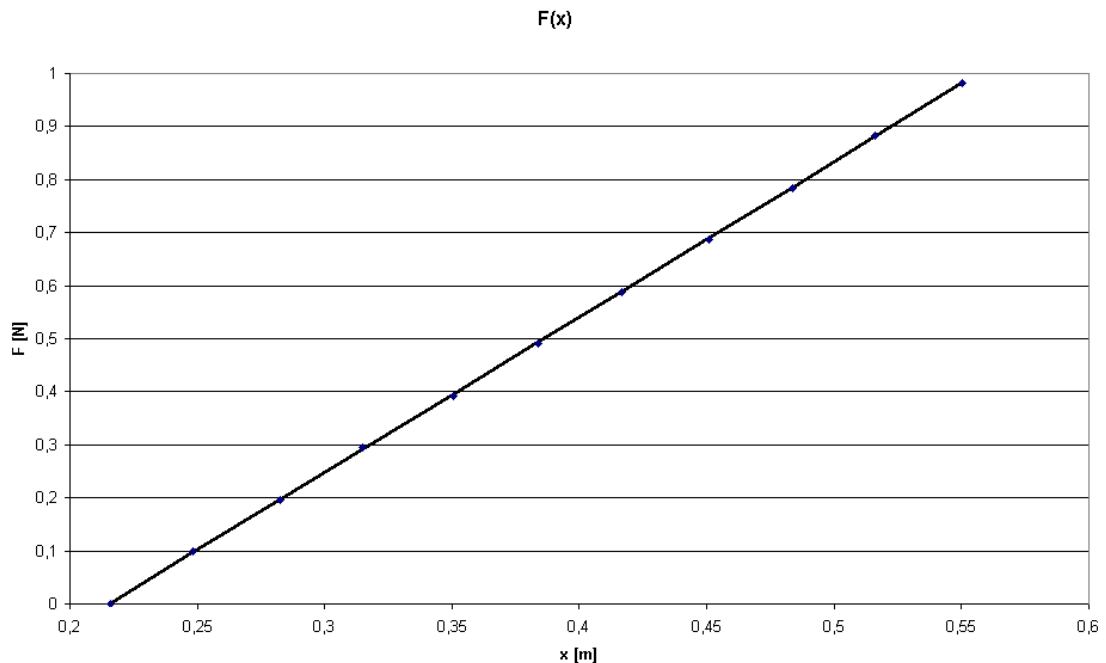
której można odczytywać wychylenie sprężyny na skali, którą stanowi centymetr krawiecki umieszczony za sprężyną na lustrzanej płytce. W pierwszej części doświadczenia mierzy się czas dwudziestu okresów drgania sprężyny obciążonej odważnikiem 50g dla różnych wychyleń początkowych. W drugiej – wydłużenie sprężyny przy różnych obciążeniach. Trzecia to pomiar zależności okresu drgań od obciążenia i na podstawie zależności tej wyznaczenie nieznaney masy m_x pewnej metalowej kształtki.

Opracowanie wyników pomiarów

Część I. Średni czas trwania dwudziestu okresów drgań dla wychylenia 5cm wyniósł 22,234s, największe odchylenie $\pm 0,106s$ zanotowano w czwartym pomiarze. Poza zakresem $22,128 \div 22,34s$ znajdują się wyniki dla wychyleń 1,6 \div 9cm – czyli dla aż 5 serii pomiarowych. Tym niemniej dla dalszych obliczeń zakłada się izochronizm drgań.

Część II. Poniżej przedstawiony jest wykres zależności przyłożonej siły (ciężaru odważników) od wychylenia (uśrednionego dla zwiększanego i zmniejszanego obciążenia). Tabela danych naniesionych na wykres:

$mg[N]$	$\Delta x[m]$	$mg[N]$	$\Delta x[m]$
0,000	0,216	0,213	0,216
0,098	0,249	0,245	0,249
0,196	0,283	0,279	0,283
0,294	0,315	0,310	0,315
0,392	0,351	0,345	0,351
0,491	0,384		

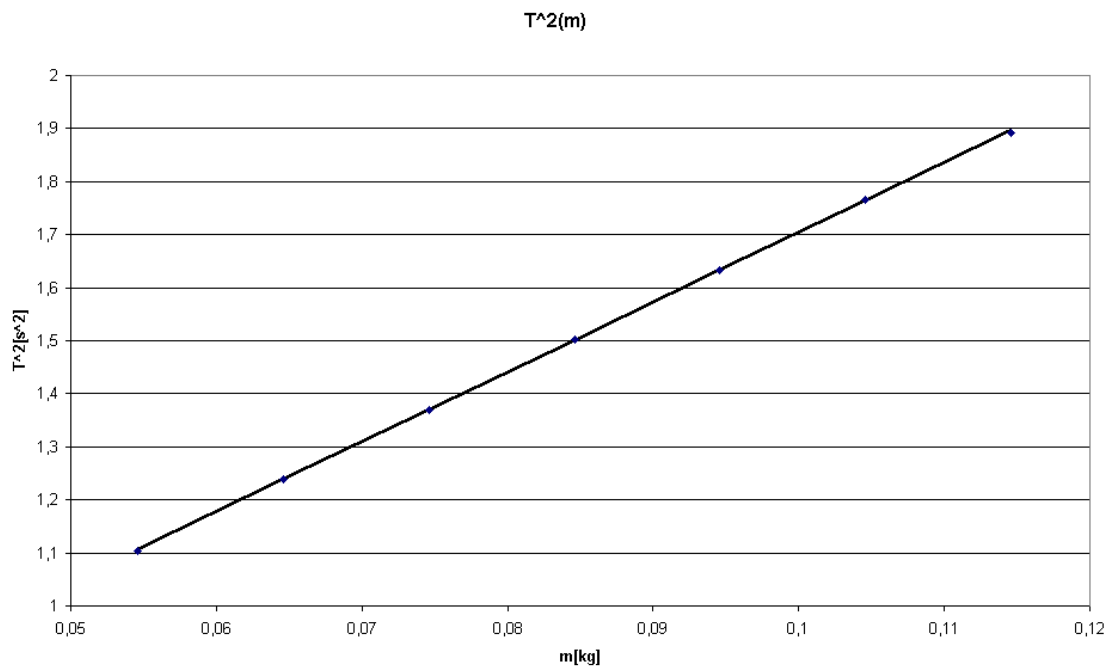


Współczynnik kierunkowy prostej regresji to k sprężyny:

$$k = 2,9294 \quad u(k) = 0,0065 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Część III. Poniżej przedstawiony jest wykres zależności kwadratu okresu oscylacji ($\frac{1}{20}$ średniej zmierzonych wartości) od masy obciążającej (w tym masy szalki). Tabela danych naniesionych na wykres:

$m[\text{kg}]$	$T^2 [\text{s}^2]$
0,0546	1,1034
0,0646	1,2390
0,0746	1,3697
0,0846	1,5032
0,0946	1,6319
0,1046	1,7662
0,1146	1,8926



Współczynniki prostej regresji mają wartości

$$a = 13,157 \quad u(a) = 0,046 \left[\frac{\text{s}^2}{\text{kg}} \right]$$

$$b = 0,3878 \quad u(b) = 0,0040 \left[\text{s}^2 \right]$$

podczas gdy wyliczone teoretycznie wynoszą (m_s – masa sprężyny):

$$a = \frac{4\pi}{k} = 13,476 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}} \quad b = \frac{am_s}{3} = 0,3369 \text{s}^2.$$

By sprawdzić jaki jest udział masy sprężyny w masie od której zależy całkowity okres drgań, należy porównać doświadczalnie otrzymany iloraz $\frac{b}{a} = 0,0294[\text{kg}]$ z jego

oczekiwaną teoretycznie wartością $\frac{m_s}{3} = 0,025\text{kg}$. Kwadrat średniego okresu oscylacji dla nieznanej masy m_x wynosi $t_x^2 = 1,4942\text{s}^2$, zatem $m_x = \frac{t_x^2 - b}{a} - m_{sz} = 0,069\text{kg}$.

Wnioski

W części pierwszej pozornie wyniki nie zgodziły się z teorią (aż 5 zmierzonych wartości było poza oczekiwanym przedziałem ufności), jednak odchylenia ich od średniej są nadal bardzo małe. Błędy można przypisać dużej niepewności pomiaru czasu (czas reakcji obserwatora, niedoskonała korelacja działań między obserwatorem mierzącym czas i odliczającym okresy oscylacji).

Druga część potwierdza zasadność stosowania prawa Hooke'a w rozważanym przedziale przykładanych obciążeń. Niewielkie rozbieżności od idealnego wyniku należy tłumaczyć zużyciem sprężyny (widoczne deformacje od helikalnego kształtu).

W części ostatniej najbardziej zastanawia rozbieżność między wartościami ilorazu $\frac{b}{a}$ i $\frac{m_s}{3}$. Tu również odgrywa znaczną rolę dokładność pomiaru czasu i niedoskonałość sprężyny.