Paweł Laskoś
I rok fizyki ogólnej
poniedziałek, 10:30-12:45

9 maja 2005
prowadzący: dr Maria Błaszczyszyn

Ćwiczenie 19
Pomiar stałej grawitacji G (ważenie Ziemi)

Przyrządy pomiarowe:

- Linijka, dokładność pomiaru $\Delta L = 1\text{mm}$
- Stoper, dokładność pomiaru $\Delta t = 1\text{s}$

Uwaga: zaparafowany oryginał zapisów pomiarów – w załączniku.

I skrajne położenie				II skrajne położenie			
t[min]	b[cm]	t[min]	b[cm]	t[min]	b[cm]	t[min]	b[cm]
0	17,7	15	21,5	0	20,0	15	14,5
0,5	17,9	15,5	21,3	0,5	19,7	15,5	14,6
1	18,4	16	21,2	1	19,0	16	14,8
1,5	19,0	16,5	21,0	1,5	18,1	16,5	15,1
2	19,6	17	20,6	2	17,1	17	15,5
2,5	20,2	17,5	20,4	2,5	16,3	17,5	16,0
3	20,7	18	20,1	3	15,3	18	16,5
3,5	21,2	18,5	19,8	3,5	14,5	18,5	17,1
4	21,5	19	19,6	4	14,0	19	17,5
4,5	21,6	19,5	19,5	4,5	13,6	19,5	17,9
5	21,6	20	19,5	5	13,5	20	18,1
5,5	21,3	20,5	19,5	5,5	13,7	20,5	18,2
6	21,0	21	19,6	6	14,1	21	18,1
6,5	20,6	21,5	19,8	6,5	14,8	21,5	17,9
7	20,1	22	20,1	7	15,5	22	17,6
7,5	19,6	22,5	20,3	7,5	16,3	22,5	17,2
8	19,2	23	20,6	8	17,0	23	16,9
8,5	19,0	23,5	20,8	8,5	17,8	23,5	16,4
9	18,8	24	21,0	9	18,3	24	16,0
9,5	18,7	24,5	21,1	9,5	18,6	24,5	15,8
10	18,7	25	21,1	10	18,8	25	15,6
10,5	18,9	25,5	21,1	10,5	18,7	25,5	15,5
11	19,2	26	21,0	11	18,4	26	15,5
11,5	19,5	26,5	20,9	11,5	17,9	26,5	15,6
12	19,9	27	20,8	12	17,4	27	15,9
12,5	20,3	27,5	20,6	12,5	16,8	27,5	16,2
13	20,7	28	20,4	13	16,1	28	16,4
13,5	21,0	28,5	20,2	13,5	15,6	28,5	16,8
14	21,2	29	20,1	14	15,1	29	17,1
14,5	21,4	29,5	20,0	14,5	14,7	29,5	17,3
		30	19,9			30	17,5

Wyniki: $G = 0{,}87(22) \cdot 10^{-12} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Opis teoretyczny

Prawo powszechnego ciążenia sformułowane zostało przez Izaaka Newtona, i mówi, że dwa obdarzone masą ciała przyciągają się wzajemnie z siłą równą co do wartości

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

gdzie r to odległość między nimi, m_1, m_2 to ich masy, zaś G to uniwersalna stała grawitacji. Jest ona bardzo mała – ok. $6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$, zaś trudności w jej wyznaczaniu sprawiają, że jest ona najgorzej poznaną stałą fizyczną.

Od czasów Newtona zastosowano zasadniczo dwie (z dokładnością do modyfikacji mających na celu ograniczenie wpływu otoczenia) skuteczne metody pomiarów tej stałej: stosowano *wagę skręceń Cavendisha* oraz *wagę Jolly'ego*.

Druga z wymienionych metod korzysta z wagi czterech szalkach – dwie z nich zawieszone wysoko nad ziemią, dwie odpowiadające im – nisko nad ziemią. Przygotowuje się cztery przedmioty o identycznym kształcie, z czego 2 są ciężkie, a 2 – lekkie (np. puste i napełnione rtęcią kolby). Lekkie przedmioty kładzie się na niskich szalach, ciężkie – na wysokich, i równoważy wagę. Następnie zamienia się miejscami jeden lekki i ciężki przedmiot, po czym równoważy wagę dokładając na odpowiednią szalkę odpowiedni ciężarek. Z uzyskanych danych wyliczyć można G.

Metoda zastosowana przez Henry'ego Cavendisha wykorzystuje wagę skręceń – zawieszony na cienkiej nici lekki drążek zakończony niewielkimi kulami z materiału o dużej gęstości. Para dużych kul zamontowana jest na obrotowej belce tak, że można je ustawić w dwu „skrajnych położeniach" w pobliżu małych kul. Siła grawitacji między parami kul wychyla *wahadło torsyjne*, jakie stanowi nić z drążkiem; przeciwko niej działa siła odprężająca nić. Obserwując drgania wahadła w obu skrajnych położeniach wyznaczamy środki drgań. Połowa ich różnicy to położenie równowagi między siłą grawitacji a siłą sprężystości nici – z porównania ich wyznaczyć można G. Ponieważ dla specyficznie wytworzonej nici nie można stosować tablicowych wartości modułu sztywności, moment skręcający wyznaczymy z równania wahadła torsyjnego

$$I\ddot{\phi} + \kappa\phi = 0$$

(I – moment bezwładności wahadła, κ – moment kierujący, ϕ – wychylenie) i okresu drgań wahadła. Zatem $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$ czyli

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$$

dla małych kul o masie m i pomijalnie lekkiego pręta o długości $2d$. Gdy przyrównamy dwa momenty sił – grawitacyjnej $N_g = 2d\frac{GMm}{r^2}$ i sprężystości $N_s = \kappa\phi$, otrzymamy zależność

$$G = \frac{4d\pi^2 r^2}{MT^2}\phi.$$

Opis doświadczenia

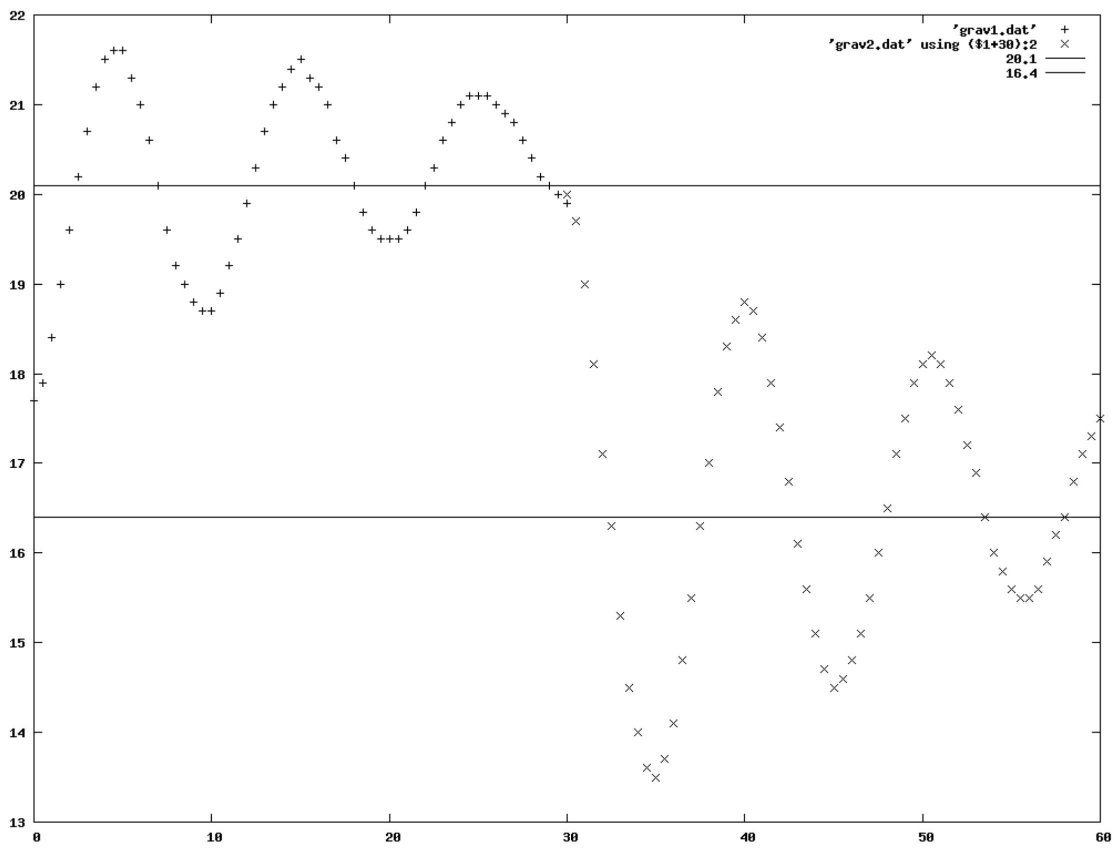
Układ doświadczalny stanowi waga skręceń Cavendisha (na blacie zamocowanym do ściany, by wyeliminować wstrząsy własne eksperymentatorów), wskaźnik laserowy na statywie i zawieszonej linijki, podklejonej taśmą papieru. Ponieważ zmiany wychyleń wagi są bardzo małe, mierzy się je za pomocą wskaźnika laserowego, którego promień pada na zwierciadło zamocowane u spojenia nici z prętem podtrzymującym małe kule, zaś położenie jego odbicia odczytywane jest na skali linijki. W dwu skrajnych położeniach dużych kul, przez pół godziny co 30 sekund odczytywane jest położenie plamki na skali. Stąd wyznaczane są środki drgań w obu położeniach dużych kul, zaś ich różnica Δl ma się do kąta ϕ następująco: $\phi = \frac{\Delta l}{4L}$, gdzie $L = 86$cm jest odległością między zwierciadłem a linijką. Zależność ta wynika z prostej trygonometrii, którą dla małych kątów, na których tu operujemy została przybliżona do proporcji; wystąpienie liczby 4 we wzorze wynika z tego, że Δl odpowiada sumie kątów padania i odbicia światła, z których każdy równy jest różnicy środków wahań w skrajnych położeniach dużych kul, czyli 2ϕ.

Stałe występujące w ostatecznym wzorze

$$G = \frac{d\pi^2 r^2 \Delta l}{MT^2 L}$$

mają wartości: $r = 47$mm (wartość zmienna, lecz zmiany – wynikające z wychyleń wagi – są pomijalne), $d = 5$cm, $M = 1{,}5$kg.

Opracowanie wyników pomiarów



Na powyższym wykresie przedstawiono dane doświadczalne (pomiary z II położenia skrajnego przesunięte). Poziome linie przedstawiają środki odpowiednich drgań, wyznaczone następująco z wartości drugich, trzecich i czwartych ekstremów:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \frac{21{,}6 + 2 \cdot 18{,}7 + 21{,}5}{2} = 20{,}1[\mathrm{cm}] \\
l_2 &= \frac{13{,}5 + 2 \cdot 18{,}8 + 14{,}5}{2} = 16{,}4[\mathrm{cm}] \\
u(l) &= 0,1[\mathrm{cm}]
\end{aligned}
$$

Różnica środków drgań to $\Delta l = 3{,}7\mathrm{cm}, u(\Delta l) = 0,2\mathrm{cm}$. Odczytany z wykresu okres drgań $T = 10\mathrm{min}, u(T) = 1\mathrm{min}$. Zatem

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{0{,}05 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}047^2 \cdot 0{,}037}{1{,}5 \cdot 600^2 \cdot 0{,}86} = 8{,}7 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\right] \\
\frac{u(G)}{G} &= \frac{u(\Delta l)}{\Delta l} + 2\frac{u(T)}{T} = 0{,}54 + 2 \cdot 0{,}1 = 25{,}4\% \\
u(G) &= 2{,}2 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \\
\text{Masa Ziemi } M_z &= \frac{gR_z^2}{G} = \frac{9{,}81 \cdot 6371000^2}{8{,}7 \cdot 10^{-11}} = 4{,}57 \cdot 10^{24}[\mathrm{kg}]
\end{aligned}
$$

Wnioski

Otrzymane wyniki są bardzo dobre – tablicowa wartość G znajduje się w zakresie niepewności wyznaczonej wartości. Największe znaczenie ma tu błąd wyznaczenia T; w celu zmniejszenia niepewności należałoby częściej wykonywać pomiary. Ponieważ plamka laserowa była rozmyta, zaś baterie wskaźnika – prawie wyczerpane, odczyty ze skali mogły być obarczone większym błędem niż działka skali, ponadto uciążliwość odczytywania zmniejsza korelację między odnotowanym a rzeczywistym czasem odczytu.