

## Ćwiczenie 36

### Pomiar lepkości cieczy

Przyrządy pomiarowe:

- Śruba mikrometryczna – dokładność pomiaru  $\Delta h = 0,01\text{mm}$ , brak błędu zera.
- Taśma miernicza – dokładność pomiaru  $\Delta l = 0,1\text{cm}$ .
- Stoper – dokładność pomiaru  $\Delta t = 0,01\text{s}$

*Uwaga: zaparafowany oryginał zapisów pomiarów – w załączniku.*

Zmierzone śrubą mikrometryczną średnice kulek aluminiowych:

[mm]	1	2	3	4	5
kulka 1:	16,97	16,99	16,95	16,97	17,00
kulka 2:	15,22	15,17	15,10	15,08	15,19
kulka 3:	11,97	11,98	11,94	11,96	11,95
kulka 4:	10,04	10,05	10,04	10,08	10,06

Pomiary średnicy wewnętrznej cylindra:

$D[\text{cm}]$	6,8	6,7	6,9	6,7	6,8
----------------	-----	-----	-----	-----	-----

Odległości między górnymi krawędziami pierścieni (nie wykazują rozrzutu):

$$s_{12} = 27,0 \quad s_{23} = 29,9 \quad s_{13} = 56,9[\text{cm}]$$

Pomiary czasu spadku [s] kulek w cylindrze (10 serii pomiarowych):

spadek między pierścieniami 1-2					1-3				2-3			
nr kulki	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
seria 1	1,18	1,47	1,81	2,28	2,47	2,97	3,81	4,81	1,38	1,59	2,00	2,50
seria 2	1,32	1,44	1,85	2,28	2,46	2,94	3,75	4,75	1,34	1,57	1,85	2,50
seria 3	1,31	1,44	1,72	2,25	2,46	3,03	3,70	4,69	1,34	1,56	2,00	2,50
seria 4	1,22	1,47	1,84	2,29	2,46	2,84	3,72	4,72	1,29	1,62	1,94	2,50
seria 5	1,22	1,41	1,88	2,19	2,40	2,97	3,70	4,57	1,28	1,56	1,94	2,53
seria 6	1,25	1,43	1,82	2,28	2,53	3,00	3,63	4,75	1,29	1,60	1,94	2,43
seria 7	1,25	1,37	1,82	2,37	2,47	2,96	3,68	4,69	1,28	1,53	1,90	2,44
seria 8	1,29	1,50	1,78	2,28	2,41	3,00	3,78	4,63	1,28	1,57	1,88	2,37
seria 9	1,25	1,44	1,83	2,22	2,47	2,94	3,66	4,68	1,28	1,56	1,97	2,41
seria 10	1,19	1,47	1,84	2,37	2,44	2,88	3,81	4,59	1,25	1,56	1,91	2,44

Pomiary czasu wypływu cieczy z rurki włosowatej [s]:

woda:	32,38	32,28	33,31	32,25	32,63	32,68	32,13	32,12	32,60	32,25
alkohol (propanol):	70,78	71,75	71,66	69,25	70,18					
acetone:	23,59	26,03	25,97	25,81	25,25					

*Wyniki:* Lepkość [Pa · s] gliceryny (z uwzględnieniem rozmiarów cylindra)  $\mu_p = 0,5610(58)$  lub (bez jej uwzględnienia)  $\mu_n = 0,835(13)$ .  
Współczynniki lepkości względnej  $\frac{\mu_{prop}}{\mu_{woda}} = 1,71 \pm 0,012$ ;  $\frac{\mu_{acet}}{\mu_{woda}} = 0,6179 \pm 0,0057$ .

## Opis teoretyczny

Najprostszym równaniem opisującym ruch cieczy jest wynikające bezpośrednio z zasady zachowania energii *prawo Bernoulli'ego*

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.},$$

które dotyczy wyłącznie cieczy doskonałych, tj. nieściśliwych, nielepkich, płynących laminarnie i bezwirowo. Choć w stosunku do wielu cieczy opis ten jest wystarczająco dokładny, istnieją cieczki, których lepkości nie da się pominąć.

*Lepkość* definiowana jest jako «zdolność płynu do przekazywania pędu pomiędzy warstwami poruszającymi się z różnymi prędkościami». W ciałach stałych przyłożenie siły ścinającej wytwarza deformację ciała. W cieczach deformacja jest niemożliwa, pozostają zatem różnice prędkości przepływu. Odpowiednikiem lepkości w języku potocznym jest słowo „gęstość”. Wyróżnia się dwie jej miary:

- *lepkość dynamiczną*, która jest stosunkiem naprężeń ścinających do gradientu prędkości:

$$\mu = \frac{\tau}{\text{grad } v}.$$

Jej jednostką w układzie SI jest  $1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = 1 \text{Pa} \cdot \text{s}$ , zaś zwyczajowo używa się jednostki układu cgs zwanej *puazem* (na cześć J. Pouiseuille'a),  $1P = 0,1 \text{Pa} \cdot \text{s}$ .

- oraz *lepkość kinematyczną*, która jest stosunkiem lepkości dynamicznej i gęstości cieczy,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

którą mierzy się jednostkami wyłącznie kinematycznymi,  $1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ . W układzie cgs funkcjonuje jednostka *stokes* (na cześć G. Stokesa),  $1 \text{St} = 0,0001 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ .

Podstawowym równaniem, w którym występuje współczynnik lepkości cieczy, jest wzór (równoważny definicji lepkości dynamicznej)

$$F = -\mu \frac{dv}{dh} S$$

opisujący siłę potrzebną, by pokonać tarcie wewnętrzne między warstwami (o polu powierzchni  $S$ ) cieczy (o lepkości  $\mu$ ) odległymi od siebie o  $dh$ , poruszającymi się ze względną prędkością  $dv$ . Znak minus wynika z wektorowości równania – siła tarcia jest skierowana przeciwnie do prędkości.

Ruch cieczy niedoskonałych opisują nierozwiązywalne równania Naviera-Stokesa, jednak przy pewnych uproszczeniach można wyprowadzić z nich użyteczne prawa, jak *prawo Stokesa*

$$F = 6\pi r \mu v$$

wiążące siłę tarcia cząstki poruszającej się w ośrodku, jej promień, prędkość oraz lepkość cieczy. Ponadto, prawo to stosuje się wyłącznie do cieczy nieskończenie rozciągliwych

– w przeciwnym przypadku po prawej stronie konieczne jest domnożenie czynnika  $\alpha = (1 + 2,4 \frac{r}{R})$ , w którym występuje promień naczynia (oczywiście przy założeniu, że kulka spada dokładnie wzdłuż osi naczynia). Wzór ten stosuje się przyrównując jego prawą stronę do wartości  $gV(\rho - \rho_c)$  (gdzie  $\rho$  to gęstość wrzuconego ciała, zaś  $\rho_c$  - badanej cieczy) czyli siły ciężenia działającej na wrzucone ciało pomniejszoną o siłę wyporu cieczy (milcząco zakładając, że obserwowany ruch jest jednostajny, czyli że siły te równoważą tarcie cieczy). Korzystając ze wzoru na objętość kuli, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\mu = \frac{2gr^2(\rho - \rho_c)}{9v\alpha} = \frac{g(\rho - \rho_c)td^2}{18s \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)}$$

gdzie  $d = 2r$ ,  $D = 2R$ , a  $t$  to czas spadku na drodze  $s$ .

Innym prawem, które wiąże lepkość z wielkościami mierzalnymi bezpośrednio jest wzór Poiseuille'a

$$V = \frac{\pi}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} R^4 t$$

wiążący objętość  $V$  cieczy o lepkości  $\mu$ , która wypłynęła w czasie  $t$  z rurki o długości  $L$  i promieniu  $R$ . Wzór ten użyteczny jest raczej do wyznaczania względnego współczynnika lepkości, tj. stosunku lepkości cieczy badanej do lepkości cieczy wzorcowej, przy czym zazwyczaj wzorcową cieczą jest woda. Współczynnik ten ma wartość

$$\frac{\mu_{bad}}{\mu_{wz}} = \frac{\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p_{bad}}{L} R^4 t_{bad}}{\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p_{wz}}{L} R^4 t_{wz}} = \frac{\rho_{bad} g h t_{bad}}{\rho_{wz} g h t_{wz}} = \frac{\rho_{bad} t_{bad}}{\rho_{wz} t_{wz}}$$

## Opis doświadczenia

Doświadczenie składa się z dwu odrębnych części:

**Pomiar lepkości cieczy metodą Stokesa.** Układ pomiarowy składa się z wysokiego cylindra szklanego wypełnionego glicerolem, z zamontowanymi na zewnętrznych ściankach pierścieniami. Na dnie cylindra znajduje się blaszane sitko na długim pręcie, służące do wyciągania wrzuconych aluminiowych kulek. Wykonano po dziesięć serii pomiarów czasu spadku kulek pomiędzy pierścieniami 1 a 2, 1 a 3, 2 a 3. Stoper włączano i wyłączano, gdy najniższy punkt kulki mijał górne krawędzie odpowiednich pierścieni.

**Pomiar lepkości cieczy metodą Poiseuille'a.** Układ pomiarowy składa się z zamontowanego w statywie naczynia z naciętymi na ściance liniami, z którego ciecz wypływa przez rurkę kapilarną. Koniec rurki zatykano, po czym napełniano naczynie badaną cieczą do najwyższego nacięcia, po czym uwalniano ciecz i mierzono czas wypływu do momentu, kiedy poziom cieczy opadł do drugiego nacięcia od dołu. Ciecz sphywała do umieszczonej pod naczyniem szalki. Wykonano dziesięć pomiarów dla wody, oraz po pięć dla propanolu i acetonu.

## Opracowanie wyników pomiarów

**Pomiar lepkości cieczy metodą Stokesa.** Usrednione wartości średnic kulek 1–4 oraz pierścienia to

$$d_1 = 16,976 \quad d_2 = 15,152 \quad d_3 = 11,96 \quad d_4 = 10,054 \quad D = 67,8[\text{mm}].$$

Poniższa tabela przedstawia zestawienie wartości  $\mu$ [Pa · s] wyliczonych z wzoru Stokesa z wyników poszczególnych serii pomiarowych, zarówno w wersji z poprawką na rozmiar cylindra jak i pomijającej ją. Przyjęte wartości gęstości substancji to  $\rho_{Al} = 2700$ ;  $\rho_{glic} = 1263 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ .

seria	z poprawką				bez poprawki			
kulka:	1	2	3	4	1	2	3	4
spadek pomiędzy pierścieniami 1-2								
1	0,6161	0,6372	0,5276	0,4930	0,9864	0,9789	0,7510	0,6685
2	0,6892	0,6242	0,5393	0,4930	1,1034	0,9589	0,7676	0,6685
3	0,6840	0,6242	0,5014	0,4865	1,0950	0,9589	0,7136	0,6597
4	0,6370	0,6372	0,5364	0,4952	1,0198	0,9789	0,7634	0,6714
5	0,6370	0,6112	0,5480	0,4736	1,0198	0,9390	0,7800	0,6421
6	0,6527	0,6198	0,5305	0,4930	1,0449	0,9523	0,7551	0,6685
7	0,6527	0,5938	0,5305	0,5125	1,0449	0,9123	0,7551	0,6949
8	0,6736	0,6502	0,5189	0,4930	1,0783	0,9989	0,7385	0,6685
9	0,6527	0,6242	0,5334	0,4801	1,0449	0,9589	0,7593	0,6509
10	0,6214	0,6372	0,5364	0,5125	0,9947	0,9789	0,7634	0,6949
spadek pomiędzy pierścieniami 1-3								
1	0,6120	0,6109	0,5270	0,4936	0,9797	0,9385	0,7501	0,6692
2	0,6095	0,6047	0,5187	0,4874	0,9758	0,9290	0,7383	0,6609
3	0,6095	0,6232	0,5118	0,4812	0,9758	0,9575	0,7285	0,6525
4	0,6095	0,5841	0,5146	0,4843	0,9758	0,8974	0,7324	0,6567
5	0,5946	0,6109	0,5118	0,4689	0,9520	0,9385	0,7285	0,6358
6	0,6268	0,6170	0,5021	0,4874	1,0035	0,9480	0,7147	0,6609
7	0,6120	0,6088	0,5090	0,4812	0,9797	0,9353	0,7245	0,6525
8	0,5971	0,6170	0,5229	0,4751	0,9559	0,9480	0,7442	0,6442
9	0,6120	0,6047	0,5063	0,4802	0,9797	0,9290	0,7206	0,6511
10	0,6045	0,5924	0,5270	0,4710	0,9678	0,9101	0,7501	0,6386
spadek pomiędzy pierścieniami 2-3								
1	0,6507	0,6223	0,5265	0,4882	1,0417	0,9561	0,7493	0,6619
2	0,6318	0,6145	0,4870	0,4882	1,0115	0,9441	0,6931	0,6619
3	0,6318	0,6106	0,5265	0,4882	1,0115	0,9381	0,7493	0,6619
4	0,6082	0,6341	0,5107	0,4882	0,9737	0,9742	0,7269	0,6619
5	0,6035	0,6106	0,5107	0,4940	0,9662	0,9381	0,7269	0,6699
6	0,6082	0,6263	0,5107	0,4745	0,9737	0,9621	0,7269	0,6434
7	0,6035	0,5989	0,5001	0,4765	0,9662	0,9201	0,7119	0,6460
8	0,6035	0,6145	0,4949	0,4628	0,9662	0,9441	0,7044	0,6275
9	0,6035	0,6106	0,5186	0,4706	0,9662	0,9381	0,7381	0,6381
10	0,5894	0,6106	0,5028	0,4765	0,9435	0,9381	0,7156	0,6460

Wartość średnia (z poprawką):  $\bar{\mu} = 0,5610$   $u(\mu) = 0,0058$ [Pa · s]

Wartość średnia (bez poprawki):  $\bar{\mu} = 0,8354$   $u(\mu) = 0,013$ [Pa · s]

**Pomiar lepkości cieczy metodą Poiseuille'a.** Uśrednione czasy wypływu cieczy z naczynia to  $t_{woda} = 32,463$ ,  $t_{prop} = 70,724$ ,  $t_{acet} = 25,33$ [s]. Przyjęte wartości gęstości cieczy to  $\rho_{woda} = 1000$ ,  $\rho_{prop} = 785$ ,  $\rho_{acet} = 792 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ .

Otrzymane wartości i ich niepewności maksymalne:

$$\frac{\mu_{prop}}{\mu_{woda}} = 1,71 \quad \frac{\mu_{acet}}{\mu_{woda}} = 0,6179$$
$$\Delta \frac{\mu_{prop}}{\mu_{woda}} = 0,012 \quad \Delta \frac{\mu_{acet}}{\mu_{woda}} = 0,0057.$$

Wartości te wyznaczono z w/w wzoru Poiseuille'a oraz prawa przenoszenia niepewności maksymalnej w postaci

$$\Delta \frac{\mu_x}{\mu_w} = \left| \frac{t_x}{\rho_w t_w} \right| \Delta \rho_x + \left| \frac{\rho_x}{\rho_w t_w} \right| \Delta t_x + \left| \frac{\rho_x t_x}{\rho_w^2 t_w} \right| \Delta \rho_w + \left| \frac{\rho_x t_x}{\rho_w t_w^2} \right| \Delta t_w$$

gdzie  $\Delta \rho_{woda} = \Delta \rho_{prop} = \Delta \rho_{acet} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  oraz  $\Delta t_{woda} = \Delta t_{prop} = \Delta t_{acet} = 0,1[\text{s}]$  – czas reakcji eksperymentatora.

## Wnioski

Pomiar metodą Stokesa dał wynik około dwukrotnie niższy od tablicowego ( $\mu = 0,945 \text{Pa} \cdot \text{s}$ ). Rozbieżność tę można wytłumaczyć znacznym zanieczyszczeniem gliceryny, zarówno przez widoczne gołym okiem kłaki i kurz, ale też absorbowaną z powietrza parę wodną; a także faktem, że kulki nie były puszczane idealnie w osi naczynia. Duże znaczenie mógł mieć tu też błąd wynikający z niezerowego czasu reakcji obserwatora mierzącego czas. Wyniki uwzględniające i nieuwzględniające rozmiar cylindra różnią się znacznie, zatem wprowadzenie poprawki jest zasadne.

Wyniki pomiaru metodą Poiseuille'a również nie są zgodne z rzeczywistością: dla propanolu wartość tablicowa to około 2,25, dla acetonu zaś – 0,32. Tu jedynym możliwym wytłumaczeniem jest zanieczyszczenie badanych próbek.

Wydaje się, że sugerowana w instrukcji metoda oceny niepewności chybiona jest w przypadku obu metod pomiaru. Metoda Stokesa opiera się na pomiarach wielkości nieskorelowanych (de facto jednej wielkości – czasu spadku kulki), zaś stosuje się ocenę niepewności jak w pomiarach wartości skorelowanych. Z kolei w metodzie Poiseuille'a stosuje się przenoszenie niepewności maksymalnej jak przy pomiarach nie wykazujących rozrzutu, który widoczny jest w wartościach zmierzonych tą metodą.