

Ćwiczenie 46

Prawa Ohma i Kirchhoffa

1 Przebieg doświadczenia

1.1 Przyrządy pomiarowe

- Miernik uniwersalny V560, wykorzystywany jako omomierz (zakres $10\text{k}\Omega$, działka minimalna $\delta_R = 1\Omega$), woltomierz (zakres 10V , działka minimalna $\delta_U = 1\text{mV}$) oraz miliamperomierz (zakres 1A , działka minimalna $0,1\text{mA}$).
- Miernik napięcia na zasilaczu prądu stałego, zakres 10V , działka minimalna $\delta_U = 0,1\text{V}$.

1.2 Wyniki pomiarów

Opory elektryczne [Ω]:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 193 & R_2 = 2401 \\ R_3 = 550 & R_4 = 514 \\ R_5 = 869 & \end{array}$$

Spadki napięć [V] i prądy [mA] przepływające przez opory (przed dołączeniem R_5):

$$\begin{array}{ll} I_1 = 10,8 & U_1 = 2,066 \\ I_2 = 3,3 & U_2 = 7,968 \\ I_3 = 7,5 & U_3 = 4,122 \\ I_4 = 7,4 & U_4 = 3,946 \end{array}$$

Spadki napięć i prądy, po dołączeniu R_5 :

$$\begin{array}{ll} I_1 = 8,8 & U_1 = 1,684 \\ I_2 = 3,4 & U_2 = 8,389 \\ I_3 = 5,4 & U_3 = 2,928 \\ I_4 = 10,5 & U_4 = 5,447 \\ I_5 = 5,3 & U_5 = 4,615 \end{array}$$

Zaparafowana oryginalna tabela pomiarów – załączona.

1.3 Wyniki doświadczenia

Porównanie wartości prądów zmierzonych z obliczonymi znajduje się w tabeli na stronie 3.

2 Opis doświadczenia

2.1 Opis teoretyczny

Prawa Ohma i Kirchhoffa są najbardziej podstawowymi prawami rządzącymi przepływem prądu w obwodach prądu stałego. *Prawo Ohma* mówi, że spadek napięcia na pewnym oporze R zależy od prądu I i wynosi

$$U = RI. \quad (1)$$

Istnienie oporu elektrycznego wynika z zakłóceń ruchu elektronów w metalu przez drgania termiczne atomów sieci krystalicznej.

Z zasady zachowania ładunku wynika *pierwsze prawo Kirchhoffa*, czyli *prawo węzłów*. Mówi ono, że suma wszystkich prądów wpływających do węzła jest równa sumie wszystkich prądów wypływających, czyli

$$\sum I = 0, \quad (2)$$

jeśli nadamy prądom wpływającym i wypływającym przeciwne znaki. *Drugie prawo Kirchhoffa*, czyli *prawo oczek* mówi, że jeśli będziemy obchodzić oczko obwodu elektrycznego w pewnym kierunku, to prawdą jest

$$\sum U = 0, \quad (3)$$

gdzie U oznacza spadki napięcia na opornikach (ze znakiem ujemnym, jeśli prąd płynie przez opór zgodnie z kierunkiem obejścia, lub dodatnim, jeśli dany opór przechodzimy „pod prąd”) lub siły elektromotoryczne źródeł prądu (ze znakiem dodatnim, jeśli wytwarza ono prąd zgodny z kierunkiem obejścia, lub ujemnym w przeciwnym przypadku).

2.2 Opis układu doświadczalnego

Układ doświadczalny stanowi obwód elektryczny złożony następująco: opór R_1 łączy punkty A, B , $R_2 - B, D$, $R_3 - B, C$, $R_4 - C, D$. Między punktami A, D przyłożona jest siła elektromotoryczna zasilacza prądu stałego o wartości $\mathcal{E} = 10\text{V}$. Dla każdego z oporników zmierzono jego opór, prąd przepływający przez niego, i spadek napięcia na nim. Następnie podłączono między punktami A, C opór R_5 i powtórzono pomiary.

3 Obliczenia

3.1 Opracowanie wyników

W poniższej tabeli zestawiono prądy (a) zmierzone bezpośrednio, (b) wyliczone z prawa Ohma, (c) wyliczone z praw Kirchhoffa dla (1) obwodu przed dołączeniem R_5 oraz (2) po jego dołączeniu.

Kolumny (b) zostały wypełnione wartościami wyliczonymi ze wzoru $I_k = \frac{U_k}{R_k}$. By wyznaczyć wartości z kolumny (1c), policzono opór zastępczy obwodu – połączenie szeregowo oporów R_3, R_4 jest połączone równolegle z oporem R_2 , całość jest połączona szeregowo z R_1 , zatem

$$R_z = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = 930,277\Omega. \quad (4)$$

	(1)			(2)		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
I_1	10,8	10,705	10,749	8,8	8,725	8,731
I_2	3,3	3,319	3,301	3,4	3,494	3,463
I_3	7,5	7,495	7,449	5,4	5,324	5,268
I_4	7,4	7,677	7,449	10,5	10,597	10,541
I_5	—	—	—	5,3	5,311	5,273

Tabela 1: Zestawienie wartości prądów [mA]. (1) – obwód przed dołączeniem R_5 , (2) – po jego dołączeniu. (a) – pomiar bezpośredni, (b) – pomiar pośredni (wyliczenie z prawa Ohma), (c) – wyliczenie z praw Kirchhoffa

Wyliczymy stąd prąd i spadek napięcia dla R_1 :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} = 10,749\text{mA}, \quad (5)$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 2,074\text{V}. \quad (6)$$

Ponieważ spadek napięcia na R_2 , oraz na $R_3 + R_4$ będzie wynosił $\mathcal{E} - U_1$, to możemy napisać

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - U_1}{R_2} = 3,301\text{mA}, \quad (7)$$

$$I_3 = I_4 = \frac{\mathcal{E} - U_1}{R_3 + R_4} = 7,449\text{mA}. \quad (8)$$

Po dołączeniu oporu R_5 obwód stawał się na tyle skomplikowany, że konieczne było zastosowanie praw Kirchhoffa do sformułowania następującego układu równań:

$$\begin{cases} 0 = I_1 - I_2 - I_3 & \text{I prawo Kirchhoffa dla węzła } B \\ 0 = I_3 - I_4 + I_5 & \text{I prawo Kirchhoffa dla węzła } C \\ \mathcal{E} = I_1 R_1 + I_2 R_2 & \text{II prawo Kirchhoffa dla oczka } ABD \\ \mathcal{E} = I_4 R_4 + I_5 R_5 & \text{II prawo Kirchhoffa dla oczka } ACD \\ 0 = I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_5 R_5 & \text{II prawo Kirchhoffa dla oczka } ABC \end{cases} \quad (9)$$

Rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$W = R_2 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_4 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_5, \quad (10)$$

$$I_1 = \mathcal{E} \frac{R_4 R_5 + R_3 R_5 + R_3 R_4 + R_2 R_5}{W} = 8,731\text{mA}, \quad (11)$$

$$I_2 = \mathcal{E} \frac{R_4 R_5 + R_3 R_5 + R_3 R_4 + R_1 R_4}{W} = 3,463\text{mA}, \quad (12)$$

$$I_3 = \mathcal{E} \frac{R_2 R_5 - R_1 R_4}{W} = 5,268\text{mA}, \quad (13)$$

$$I_4 = \mathcal{E} \frac{R_2 R_5 + R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{W} = 10,541\text{mA}, \quad (14)$$

$$I_5 = \mathcal{E} \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_1 R_2}{W} = 5,273\text{mA}. \quad (15)$$

3.2 Rachunek błędów

Niepewność pomiaru oceniona zostanie dla prądu I_1 , przed dołączeniem R_5 . Niepewność wartości zmierzonej bezpośrednio wynosi

$$u(I_1) = \frac{0,1\text{mA}}{\sqrt{3}} = 0,058\text{mA}. \quad (16)$$

Dla wartości wyliczonej z prawa Ohma mamy

$$\begin{aligned} u(I_1) &= \sqrt{\left(\frac{\partial I_1}{\partial U_1} u(U_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial R_1} u(R_1)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,001\text{V}}{\sqrt{3}R_1}\right)^2 + \left(\frac{U_1 \cdot 1\Omega}{\sqrt{3}R_1^2}\right)^2} = \\ &= 0,032\text{mA}. \end{aligned} \quad (17)$$

Dla wartości wyliczanej z równania (5) pochodne cząstkowe stają się nieco zbyt skomplikowane w formie, by je cytować. Ostateczny wynik wynosi

$$u(I_1) = 0,063\text{mA}. \quad (18)$$

4 Wnioski

Jak widać w tabeli 1, wartości prądu zmierzone bezpośrednio, wyliczone z prawa Ohma oraz z praw Kirchhoffa są bardzo zbliżone. Różnice tylko w dwu przypadkach przekraczają 0,1mA, tzn. dla I_4 przed podłączeniem R_5 , i dla I_3 po podłączeniu. Niepewności pomiarowe wartości złożonych są na tym samym poziomie, co dla pomiaru bezpośredniego, co świadczy o dobrej jakości pomiarów.