

Ćwiczenie 57

Zależność oporu elektrycznego metalu i półprzewodnika od temperatury

1 Przebieg doświadczenia

1.1 Przyrządy pomiarowe

- Termometr elektroniczny, dokładność pomiaru $u(T) = 1^\circ\text{C}$.
- Trzy omomierze o zakresie $10\text{k}\Omega$, dokładność pomiaru $u(R) = 1\Omega$.

1.2 Wyniki pomiarów

W tabeli 1 zamieszczono wyniki pomiarów oporu opornika miedziowego (R_{Cu}), manganinowego (R_M) i półprzewodnikowego (R_s) w zależności od temperatury T . Ponadto umieszczono współrzędne punktów dla wykresu 3 – odwrotność temperatury w skali Kelwina oraz odwrotność oporu. Zaparafowana oryginalna tabela pomiarów – załączona.

1.3 Wyniki doświadczenia

Współczynnik temperaturowy oporu dla miedzi $\alpha_{Cu} = 3,676(92) \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, dla manganinu $\alpha_M = 0,071(16) \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Szerokość pasma wzbronionego dla półprzewodnika $E_g = 9,93(13)\text{kJ}$.

2 Opis doświadczenia

2.1 Opis teoretyczny

Dla przepływu prądu przez typowe materiały spełnione jest *prawo Ohma*

$$\frac{U}{I} = R, \quad (1)$$

gdzie R to *opór elektryczny*, mierzony w *omach* ($1\Omega = 1\frac{\text{V}}{\text{A}}$). Jeśli prąd płynie przez ciało o symetrii translacyjnej, długości l i przekroju S , to opór wyraża się wzorem

$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad (2)$$

gdzie *oporność elektryczna* ρ jest stałą materiałową o jednostce $1\Omega\text{m}$. Jest jednak „stałą” zależną od temperatury – zależność ta zależy od typu materiału i wynika z własności elektrycznych ciał stałych. Zdefiniowaliśmy ρ za pomocą wielkości makroskopowych, by

$T[^\circ\text{C}]$	$R_s[\Omega]$	$R_{Cu}[\Omega]$	$R_M[\Omega]$	$\frac{1}{273+T}$	$\ln R_s$
17,3	2180	2180	6210	0,003442	7,687080
20	1770	2220	6210	0,003411	7,478734
24	1430	2260	6210	0,003365	7,265429
28	1230	2290	6210	0,003320	7,114769
32	1050	2330	6220	0,003277	6,956545
36	900	2360	6220	0,003234	6,802394
40	760	2390	6210	0,003193	6,633318
44	650	2430	6210	0,003153	6,476972
48	550	2470	6210	0,003113	6,309918
52	470	2510	6210	0,003075	6,152732
56	410	2540	6210	0,003038	6,016157
60	370	2570	6210	0,003001	5,913503
64	330	2600	6210	0,002966	5,799092
68	290	2630	6210	0,002931	5,669880
72	270	2660	6210	0,002897	5,598421
76	240	2690	6210	0,002864	5,480638
80	220	2720	6210	0,002831	5,393627
84	190	2750	6200	0,002799	5,247024
88	170	2780	6200	0,002768	5,135798
92	160	2820	6200	0,002738	5,075173
96	140	2840	6200	0,002708	4,941642
100	130	2870	6200	0,002679	4,867534

Tabela 1: Pomiary doświadczalne

proceed dalsze rozważania, wyprowadzimy wyrażenie jej wielkościami mikroskopowymi. W tym celu definiujemy *gęstość prądu*

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \hat{i}, \quad (3)$$

gdzie wektor \hat{i} wskazuje kierunek przepływu prądu. Możemy napisać teraz różniczkową postać prawa Ohma

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (4)$$

gdzie *przewodność elektryczna* $\sigma = \rho^{-1}$, zaś *pole elektryczne* \vec{E} spełnia

$$E = \frac{U}{l}. \quad (5)$$

Oznaczmy teraz ładunek elementarny e i koncentrację ładunków (zakładamy, że nośniki ładunku są tylko jednego typu) n . Ładunek przenoszony w jednostce czasu przez przekrój S wynosi

$$dq = enSv dt, \quad (6)$$

gdzie v jest *prędkością unoszenia* ładunków. Jeśli skorzystamy z wzoru (3) i definicji prądu elektrycznego

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (7)$$

otrzymamy wyrażenie

$$i = \frac{I}{S} = \frac{dq}{S dt} = \frac{enSv dt}{S dt} = env = enuE, \quad (8)$$

gdzie przez $u = \frac{v}{E}$ nazywamy *ruchliwością nośników prądu*. Z wzoru (4) otrzymamy

$$\sigma = enu. \quad (9)$$

W metalach prąd przewodzi chmura uwspólnionych elektronów walencyjnych. Jony metalu wprawione są w drgania termiczne, o amplitudzie rosnącej z temperaturą. Drgania sieci krystalicznej utrudniają ruch elektronów, z czego wynika prawo

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (10)$$

wyrażające oporność elektryczną przez jej wartość w pewnej temperaturze (np. pokojowej) i różnicę temperatur. Współczynnik α nazywamy *współczynnikiem temperaturowym oporu*. Prawo to nie stosuje się w niskich temperaturach (rzędu kelwinów) – tam oporność elektryczna równa jest *oporności resztkowej* ρ_r , która pochodzi z zaburzeń sieci krystalicznej metalu przez domieszkowanie, zanieczyszczenia, delokalizacje atomów w sieci.

W półprzewodnikach mamy do czynienia z zupełnie innym mechanizmem przewodzenia prądu. Aby go zrozumieć, przyjrzyjmy się strukturze stanów wzbudzonych i podstawowych półprzewodnika. Ponad pasmem walencyjnym znajduje się zabronione (co wynika z rozważań teorii kwantów) pasmo energetyczne szerokości E_g , powyżej niego zaś puste pasma dozwolone. Jeśli $E_g > 2\text{eV}$, to mówimy, że materiał jest izolatorem, poniżej tej granicy – półprzewodnikiem¹. Rozgraniczenie takie wynika z faktu, że powyżej tej granicy nie-
możliwe staje się samorzutne termiczne przekroczenie pasma wzbronionego przez elektron.

¹Dla metali E_g jest pomijalnie małe.

Jeśli takie przekroczenie nastąpi, w paśmie walencyjnym powstaje umowny twór *dziury elektronowej* o ładunku elementarnym dodatnim, który może „poruszać się” przewodząc prąd. Z wzrostem temperatury rośnie koncentracja ładunków, zaś spadnie ich ruchliwość. Spadek ruchliwości jest wolniejszy niż wzrost koncentracji, i zachodzi zależność

$$\sigma = Ae^{-\frac{E_g}{2k_B T}}, \quad (11)$$

dla pewnej stałej A i stałej Boltzmanna $k_B = 1,38054(18)\frac{\text{J}}{\text{°C}}$. Proste przekształcenia dają nam postać

$$R = Be^{\frac{E_g}{2k_B T}}, \quad (12)$$

co po zlogarytmowaniu daje nam liniową zależność od $\frac{1}{T}$

$$\ln R = \ln B + \frac{E_g}{2k_B} \frac{1}{T}, \quad (13)$$

z której współczynnika kierunkowego wyliczyć można szerokość pasma wzbronionego.

2.2 Opis układu doświadczalnego

Układ doświadczalny stanowią trzy oporniki (z miedzi, manganinu i półprzewodnika). Przyłożone do nich (stopniowo zwiększane) napięcie powoduje w nich przepływ prądu i wzrost temperatury, mierzonej termometrem elektronicznym. Opór elektryczny oporników mierzą trzy omomierze o zakresie 10k Ω .

3 Obliczenia

3.1 Opracowanie wyników

Dla zależności $R(T)$ dla miedzi i manganinu wyliczono programem Gnuplot współczynniki prostych regresji. Otrzymane współczynniki kierunkowe prostych reprezentują iloczyn αR_0 , gdzie $R_0 = R(17,3^\circ\text{C})$.

$$a_{Cu} = 8,212 \left[\frac{\Omega}{\text{°C}} \right], \quad (14)$$

$$a_M = -0,155 \left[\frac{\Omega}{\text{°C}} \right], \quad (15)$$

$$\alpha_{Cu} = \frac{a_{Cu}}{R_{0,Cu}} = 0,003767[\text{°C}^{-1}], \quad (16)$$

$$\alpha_M = \frac{a_M}{R_{0,M}} = 0,000071[\text{°C}^{-1}]. \quad (17)$$

W ten sam sposób otrzymamy współczynnik kierunkowy prostej regresji zależności $(\ln R)(T^{-1})$, z którego wyliczymy szerokość pasma wzbronionego dla półprzewodnika.

$$a_s = 3596[\text{°C}], \quad (18)$$

$$E_g = 2a_s k_B = 9930[\text{J}]. \quad (19)$$

3.2 Rachunek błędów

Niepewności współczynników wyliczonych programem Gnuplot wynoszą

$$u(a_{Cu}) = 0,092 \left[\frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \right], \quad (20)$$

$$u(a_M) = 0,034 \left[\frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \right], \quad (21)$$

$$u(a_s) = 47[^\circ\text{C}]. \quad (22)$$

Aby policzyć niepewności, skorzystamy z wzoru (15) instrukcji ONP na niepewność złożoną zmiennych nieskorelowanych.

$$u(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{a u(R_0)}{R_0^2} \right)^2}, \quad (23)$$

$$u(E_g) = \sqrt{(2a_s u(k_B))^2 + (2k_B u(a_s))^2}. \quad (24)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy ostatecznie

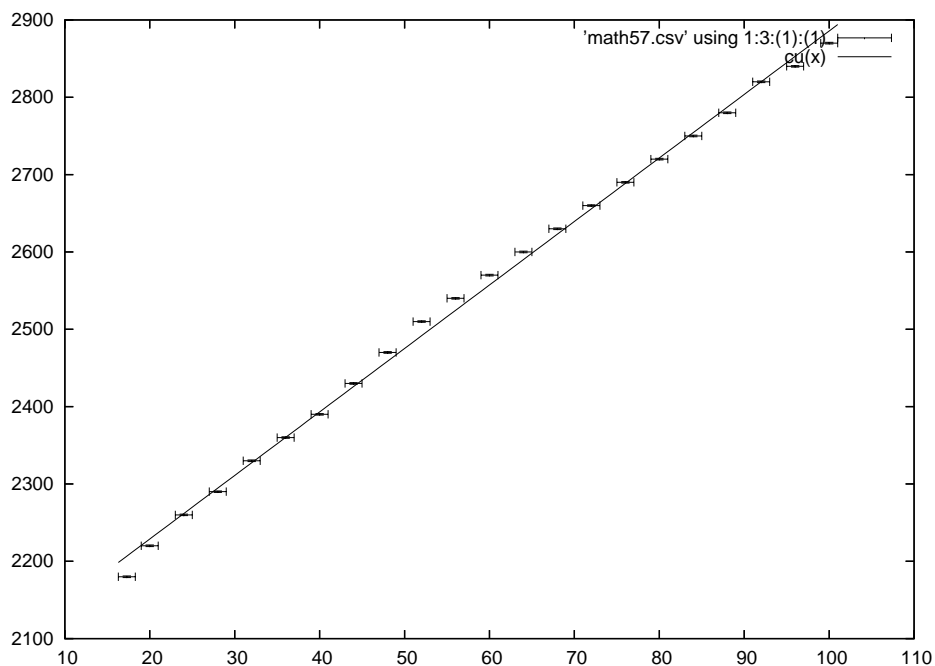
$$u(\alpha_{Cu}) = 0,000042[^\circ\text{C}^{-1}], \quad (25)$$

$$u(\alpha_M) = 0,000016[^\circ\text{C}^{-1}], \quad (26)$$

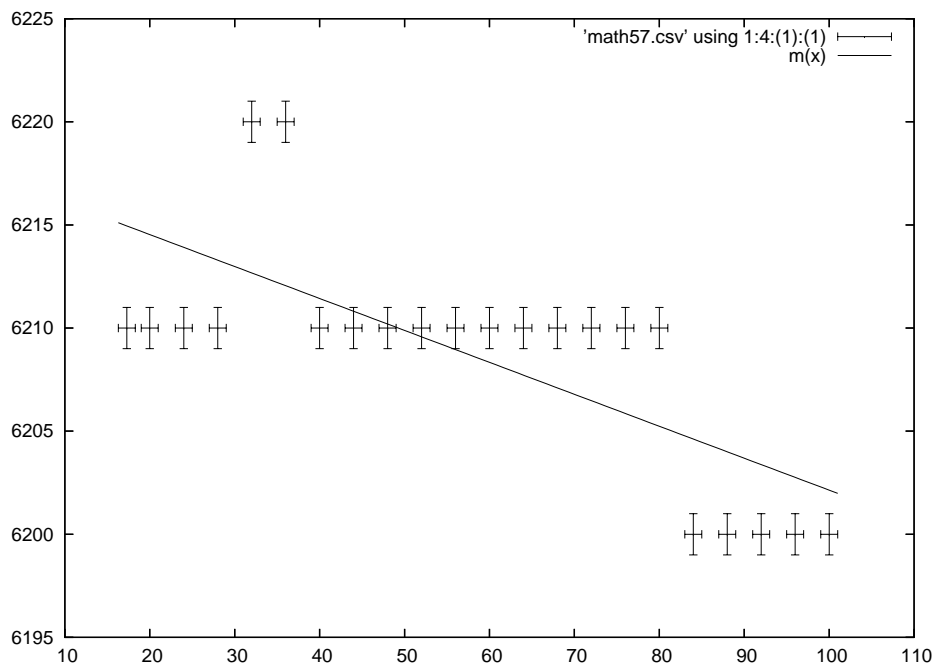
$$u(E_g) = 130[\text{J}]. \quad (27)$$

4 Wnioski

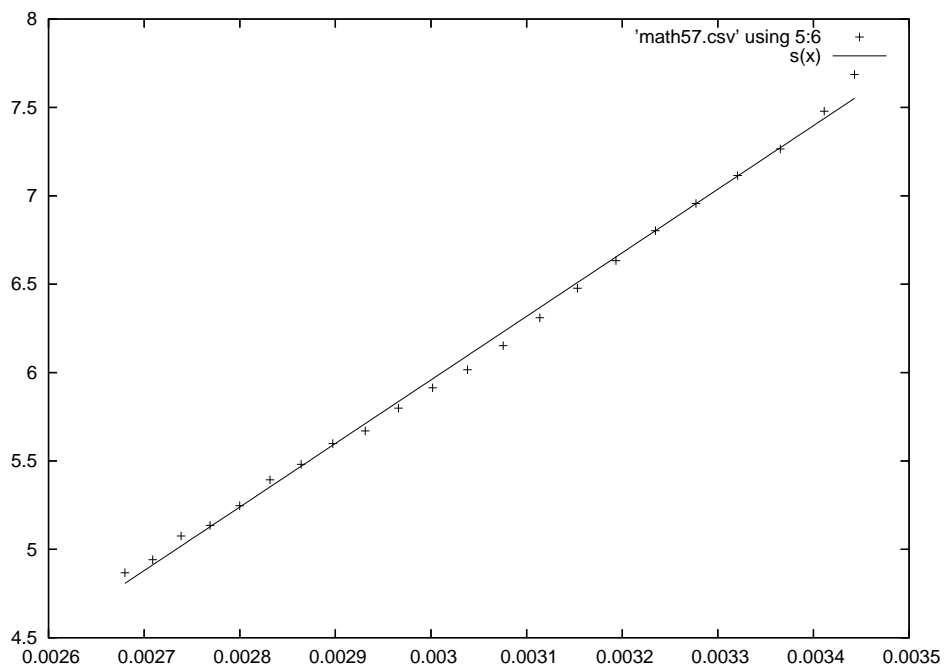
Zgodność danych doświadczalnych z rozważaniami teoretycznymi okazała się dobra, punkty na wykresach 1 i 3 układają się w pobliżu prostej regresji. Do badań zmian oporu izolatora (wykres 2) należałoby zastosować przyrząd o wyższej czułości, gdyż zmiany badanych wartości są na poziomie działki minimalnej omomierza. Skutkiem tego jest dyskretny wykres i zła dokładność wyznaczenia współczynnika kierunkowego prostej regresji (na poziomie 22%, w porównaniu do 1% dla miedzi).



Rysunek 1: Zależność $R(T)$ dla miedzi. Jednostki wyskalowane w jednostkach SI



Rysunek 2: Zależność $R(T)$ dla manganinu. Jednostki wyskalowane w jednostkach SI



Rysunek 3: Zależność $(\ln R)(T^{-1})$ dla półprzewodnika. Oś odciętych wyskalowana w K^{-1} , rzędnych – niemianowana