

II pracownia fizyczna

**Wyznaczanie ładunku właściwego
elektronu e/m**

Paweł Laskoś-Grabowski

prowadzący: dr hab. Marek Nowicki

3 kwietnia 2007

Rozdział 1

Wstęp teoretyczny

1.1 Pole elektromagnetyczne

Pole elektromagnetyczne jest polem fizycznym powstającym w wyniku oddziaływań i ruchów ładunków elektrycznych. Jest matematycznym opisem oddziaływania elektromagnetycznego, jednego z czterech oddziaływań fundamentalnych. Można rozumieć je jako sumę dwóch pól – elektrycznego i magnetycznego. Pierwsze z nich najczęściej opisuje się przez wektor pola elektrycznego, \vec{E} , drugie – przez wektor indukcji magnetycznej, \vec{B} . Wektory te związane są fundamentalnymi zależnościami – prawami Maxwella:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

lub w postaci całkowej

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (1.6)$$

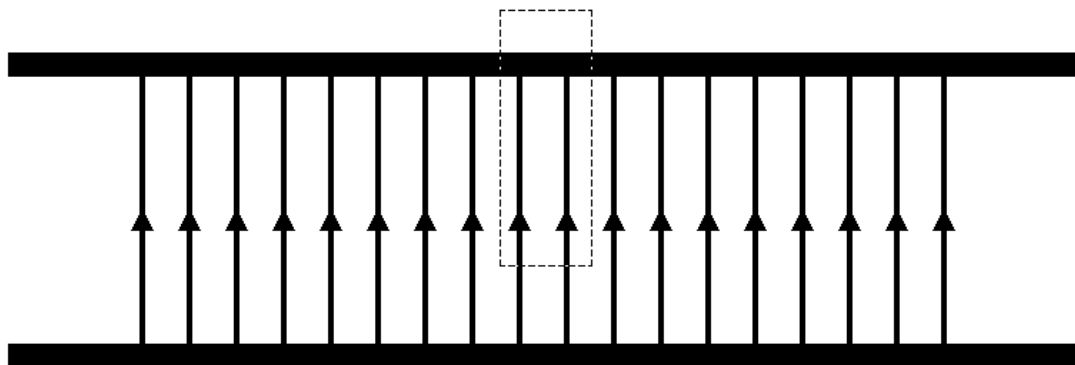
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (1.7)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1.8)$$

gdzie ρ – lokalna gęstość ładunku, \vec{J} – gęstość prądu, q – ładunek zamknięty w objętości ograniczonej powierzchnią całkowania, i – prąd płynący przez powierzchnię ograniczoną obwodem całkowania, Φ_E, Φ_B – strumienie odpowiednich pól przez powierzchnię ograniczoną obwodem całkowania.

1.1.1 Pole elektryczne wewnątrz kondensatora

Jeśli zastosujemy całkowe prawo Gaussa (1.5) do walcowej powierzchni całkowania zaznaczonej na schemacie kondensatora płaskiego (rys. 1.1), otrzymamy wyrażenie na pole



Rysunek 1.1: Schemat kondensatora płaskiego z zaznaczonymi liniami pola elektrycznego i powierzchnią całkowania dla prawa Gaussa.

elektryczne wewnątrz płaskiego kondensatora próżniowego. Jak wiemy z analizy jakościowej, pole elektryczne występuje tylko we wnętrzu kondensatora i jest tam jednorodne. Stąd wkład górnej podstawy do całki $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ jest zerowy, jak również wkład powierzchni bocznej – tam $\vec{E} \perp d\vec{S}$. Z kolei wkład dolnej podstawy wynosi Es , gdzie s jest polem podstawy powierzchni całkowania. Możemy więc napisać

$$Es = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

gdzie zamknięty w objętości ograniczonej powierzchnią całkowania ładunek $q = \rho_S s$, gdy gęstość powierzchniowa ładunku wynosi ρ_S . Z definicji pojemność kondensatora o całkowitej powierzchni okładki S wynosi

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_S S}{V} \quad (1.10)$$

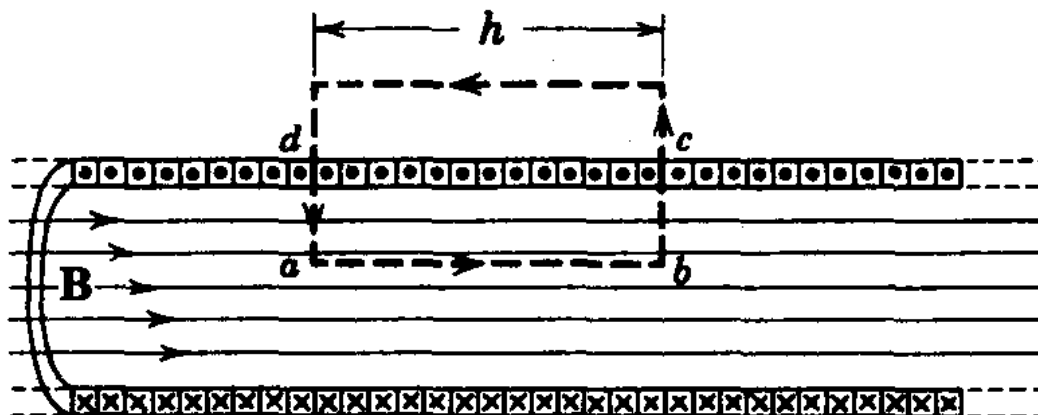
gdy po przyłożeniu do jego okładek napięcia V gromadzą się na nich ładunki $\pm Q$. Ostatecznie otrzymujemy więc

$$E = \frac{VC}{S\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

1.1.2 Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu

Cewkę o gęsto nawiniętych zwojach nazywamy solenoidem. Jeśli zastosujemy całkowite prawo Ampère'a (1.7) do prostokątnego obwodu całkowania zaznaczonego na schemacie solenoidu (rys. 1.2), otrzymamy wyrażenie na indukcję magnetyczną wewnątrz solenoidu. Jak wiemy z analizy jakościowej, pole magnetyczne występuje tylko we wnętrzu solenoidu i jest tam jednorodne. Stąd wkład górnej krawędzi do całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ jest zerowy, jak również wkład krawędzi bocznych – tam $\vec{B} \perp d\vec{l}$. Z kolei wkład dolnej podstawy wynosi Bh , a zatem (przy założeniu braku zmian pola w czasie) możemy napisać

$$Bh = \mu_0 i \quad (1.12)$$



Rysunek 1.2: Schemat solenoidu z zaznaczonymi liniami pola magnetycznego i obwodem całkowania dla prawa Ampère'a. Obraz zaczerpnięty z [2]

gdzie i to całkowity prąd płynący przez powierzchnię ograniczoną obwodem całkowania. Jeśli w obwodzie całkowania mieści się n zwojów solenoidu, zaś prąd płynący przez solenoid to i_0 , to $i = ni_0$, zaś gęstość liniowa solenoidu wynosi $\rho_l = n/h$. Można zatem napisać

$$B = \mu_0 \rho_l i_0. \quad (1.13)$$

1.2 Siła Lorentza

Na cząstkę o ładunku q w polu elektromagnetycznym działa siła, nazywana siłą Lorentza. Gdy $\vec{B} = 0$, składowa elektryczna siły Lorentza wynosi

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1.14)$$

– oznacza to, że rozwiązanie zagadnienia ruchu cząstki w takim polu daje takie same (jakościowo) wyniki, co rzut ukośny: składowa prędkości cząstki prostopadła do wektora pola \vec{v}_\perp pozostaje stała, zaś składowa równoległa zmienia się jak w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$v_\parallel = v_{0\parallel} + at \quad (1.15)$$

gdzie $a = qE/m$.

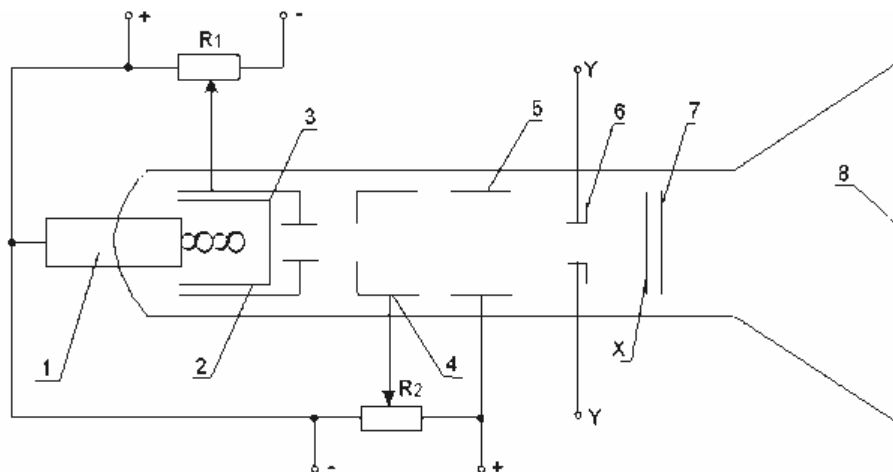
Składowa magnetyczna siły Lorentza wyraża się wzorem

$$F = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.16)$$

skąd widać od razu, że ruch cząstki w nieobecności pola elektrycznego przebiega po torze będącym linią śrubową. W szczególnych przypadkach jest to ruch okrężny ($\vec{v} \perp \vec{B}$) lub jednostajny ($\vec{v} \parallel \vec{B}$).

Ostatecznie wzór na siłę Lorentza to

$$F = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.17)$$



Rysunek 1.3: Schemat lampy oscyloskopowej. 1 – grzejnik, 2 – katoda, 3 – cylinder Wehnelta, 4, 5 – anody, 6, 7 – kondensatory, 8 – ekran. Obraz zaczerpnięty z [5]

1.3 Lampa oscyloskopowa

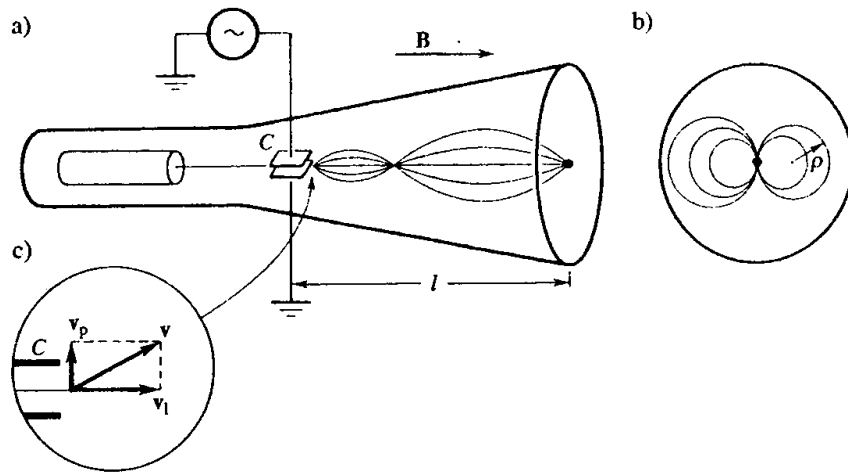
Na rys. 1.3 przedstawiono schemat budowy lampy oscyloskopowej. Jest to lampa elektronowa z żarzoną katodą, w której stosuje się dwie anody o różnych wartościach napięcia, których dobór pozwala na zogniskowanie wiązki elektronów w jednym punkcie ekranu. Ekran pokryty jest od wewnątrz substancją fluorescencyjną, która bombardowana elektronami – świeci. Istotnym elementem konstrukcji oscyloskopu jest cylinder Wehnelta, o ujemnym w stosunku do katody potencjale, od którego wartości zależy ilość elektronów docierających do ekranu, a więc jasność plamki. W oscyloskopie umieszcza się parę wzajemnie prostopadłych kondensatorów, by poprzez przykładanie napięć do ich okładek możliwa była regulacja położenia plamki na ekranie.

1.4 Metody pomiaru e/m

Proste doświadczenia, w których bada się ruch elektronów, pozwalają jedynie na wyznaczenie ładunku właściwego tych cząstek, czyli stosunku e/m . Wynika to z faktu, że przyspieszenie powstające w wyniku siły Lorentza jest wprost proporcjonalne do tego stosunku. Pierwsza próba wyznaczenia ładunku elektronu, czyli eksperyment Millikana z naładowanymi kroplami oleju, polegała na wzajemnym wygaszaniu sił elektromagnetycznych i grawitacyjnych wywieranych na ciało. Jednak z powodu istotnej różnicy rzędów wielkości tych oddziaływań takie doświadczenie jest dużo trudniejsze i wymaga dokładniejszego sprzętu i izolacji od zakłóceń zewnętrznych.

1.4.1 Metoda pola podłużnego

W metodzie pola podłużnego (schemat na rys. 1.4) stosuje się lampę oscyloskopową umieszczoną wewnątrz solenoidu tak, że ruch elektronów jest równoległy do kierunku pola magnetycznego. Do jednej pary płytek odchylających przyłożone jest szybko zmienne napięcie, które nadaje elektronom składową poprzeczną prędkości. Elektrony poruszać się będą po liniach spiralnych, zaś w płaszczyźnie prostopadłej do pola \vec{B} zakreślać będą



Rysunek 1.4: Ogniskowanie elektronów w metodzie pól podłużnych. a – przebieg torów elektronów, b – rzut torów elektronów na płaszczyznę ekranu, c – rozkład prędkości na składowe. Obraz zaczerpnięty z [3]

okręgi o promieniu ρ . Siła Lorentza jest w tym ruchu okrężnym siłą dośrodkową:

$$ev_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{\rho} \quad (1.18)$$

$$v_{\perp} = \frac{e}{m}B\rho \quad (1.19)$$

W doświadczeniu tak dobiera się napięcie przyspieszające elektrony U , by zataczały one tylko jeden okrąg. Z zasady zachowania energii możemy określić prędkość podłużną elektronów, a znając odległość l między płytkami a ekranem – czas, w którym elektrony przebywają ten dystans.

$$eU = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \quad (1.20)$$

$$t = \frac{l}{v_{\parallel}} = l \left(2 \frac{e}{m} U \right)^{-1/2} \quad (1.21)$$

Ten sam czas, ze względu na ruch okrężny, wyraża się następująco:

$$t = \frac{2\pi\rho}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (1.22)$$

Przyrównanie tych dwóch wyrażeń daje

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 l^2} \quad (1.23)$$

co zgodnie z (1.13) można przepisać jako

$$\frac{e}{m} = 8U \left(\frac{\pi}{l\mu_0 i_0 \rho l} \right)^2 \quad (1.24)$$

1.4.2 Metoda pól poprzecznych

W metodzie pól poprzecznych bada się odchylenia toru ruchu elektronu pod wpływem stałego pola elektrycznego pomiędzy jedną z par płytek i/lub prostopadłego do osi lampy pola magnetycznego wytworzonego przez cewki Helmholtza-Gaugaina.

Równanie ruchu elektronu w polu elektrycznym to

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}E \quad (1.25)$$

gdzie po prostych przekształceniach różniczkowych możemy podstawić

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2y}{\partial x^2}v^2 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2} = \frac{eE}{mv^2} \quad (1.27)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy wyrażenie na wychylenie elektronu

$$Y_E = \frac{e}{mv^2}EK_E \quad (1.28)$$

gdzie stała K_E wynika z geometrii lampy i płytek.

Analogicznie, z równania ruchu dla pola magnetycznego:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}vB \quad (1.29)$$

otrzymujemy

$$Y_B = \frac{e}{mv}BK_B \quad (1.30)$$

gdzie stała K_B wynika z geometrii lampy i cewek.

Konieczne jest jeszcze określenie prędkości elektronów. Uzyskuje się to kompensując działanie obu pól, a z równości

$$F = e(E - vB) = 0 \quad (1.31)$$

otrzymuje się

$$v = \frac{E}{B} \quad (1.32)$$

Znając tę prędkość, stosunek e/m można wyliczyć z zależności (1.28) [7].

Rozdział 2

Opis i przebieg doświadczenia

2.1 Metoda pola podłużnego

Układ pomiarowy składa się z lampy oscyloskopowej umieszczonej wewnątrz solenoidu ($L = 47,4 \text{ cm}$, $N = 510$) z regulowanym napięciem przyspieszającym, generatora zmiennego napięcia przykładanego do płytek wewnątrz lampy, generatora prądu stałego płynącego przez solenoid, oraz amperomierza klasy 0,5 mierzącego tę ostatnią wielkość.

Do płytek przyłożono zmienne napięcie odchyłające. Dla napięć przyspieszających z zakresu $300 \div 1500 \text{ V}$ co 100 V dobrano i zanotowano natężenie prądu najlepiej ogniskujące wiązkę, tak, by dawała punktowy obraz. Czynności przeprowadzono dla dwóch par płytek o różnych odległościach od ekranu: $l_1 = 8,3 \pm 0,1 \text{ cm}$, $l_2 = 10,2 \pm 0,1 \text{ cm}$.

2.2 Metoda pól poprzecznych

Układ pomiarowy składa się z lampy oscyloskopowej podłączonej do układu sterującego, generatora napięcia stałego podłączonego do jednej z par płytek oscyloskopu (generującej przesunięcia pionowe), oraz generatora prądu stałego podłączonego do cewek Helmholtza-Gaugaina umieszczonych po obu stronach lampy oscyloskopowej. Przyrządy pomiarowe to woltomierz, mikroamperomierz (do pomiaru ww. wielkości, oba klasy 0,5) oraz podziałka na ekranie oscyloskopu, wyskalowana co $0,5 \text{ cm}$.

Dokonano pomiarów zależności wychylenia od napięcia (pole elektryczne), wychylenia od prądu (pole magnetyczne), oraz napięcia od prądu (pola o zerowej sile wypadkowej). W każdym przypadku wykonano po jednej serii pomiarów dla każdej polaryzacji (tj. wychylenia w górę/dół).

Zgodnie z [7], dla lampy użytej w doświadczeniu

$$K_E = a \left(L - \frac{a}{2} \right) \quad (2.1)$$

$$E = \frac{U}{d} \quad (2.2)$$

$$K_B = b \left(L - \frac{b}{2} \right) \quad (2.3)$$

$$B = \mu_0 \frac{16zi_0}{5\sqrt{5}R} \quad (2.4)$$

gdzie $a = 1,1$ cm – długość płytek odchyłających, $L = 9$ cm – odległość płytek od ekranu, U – napięcie odchyłające, $d = 0,4$ cm – odległość między płytkami, $b = 1,1$ cm – obszar działania pola magnetycznego, $z = 650$ – ilość zwojów w cewce Helmholtza-Gaugaina, i_0 – prąd płynący przez cewki, $R = 5$ cm – promień cewek.

Rozdział 3

Obliczenia i wyniki

3.1 Metoda pola podłużnego

Wartości wyznaczone doświadczalnie oraz wyniki obliczeń e/m zawarte są w tabeli 3.1. Indeks 1 tyczy się pomiarów wykonanych dla pierwszej pary płytek, 2 – dla drugiej. Wartości średnie, ich średnie błędy kwadratowe oraz średnie błędy kwadratowe dla pojedynczych pomiarów (obliczone zgodnie z wzorami z [6]) są następujące (wszystkie wartości w 10^{11}C/kg):

$$\overline{e/m}_1 = 1,576 \qquad \overline{e/m}_2 = 1,591 \qquad (3.1)$$

$$s(\overline{e/m})_1 = 0,010 \qquad s(\overline{e/m})_2 = 0,011 \qquad (3.2)$$

$$s(e/m)_1 = 0,037 \qquad s(e/m)_2 = 0,042 \qquad (3.3)$$

Na wykresach 3.1, 3.2 przedstawiono zależności $U(I^2)$ wraz z prostymi regresji dla odpowiednio pierwszej i drugiej pary płytek. Współczynniki prostych regresji $U = aI^2 + b$ wyliczone programem GNUplot są następujące:

$$a_1 = 24,82(45) [\text{V/I}^2] \qquad b_1 = 8(17) [\text{V}] \qquad (3.4)$$

$$a_2 = 37,19(33) [\text{V/I}^2] \qquad b_2 = 20,5(8,4) [\text{V}] \qquad (3.5)$$

Z zależności

$$\frac{e}{m} = 8a \left(\frac{\pi}{l\mu_0\rho l} \right)^2 \qquad (3.6)$$

otrzymujemy kolejne przybliżenia szukanego stosunku:

$$e/m_{regr,1} = 1,556 \text{ C/kg} \qquad (3.7)$$

$$e/m_{regr,2} = 1,544 \text{ C/kg} \qquad (3.8)$$

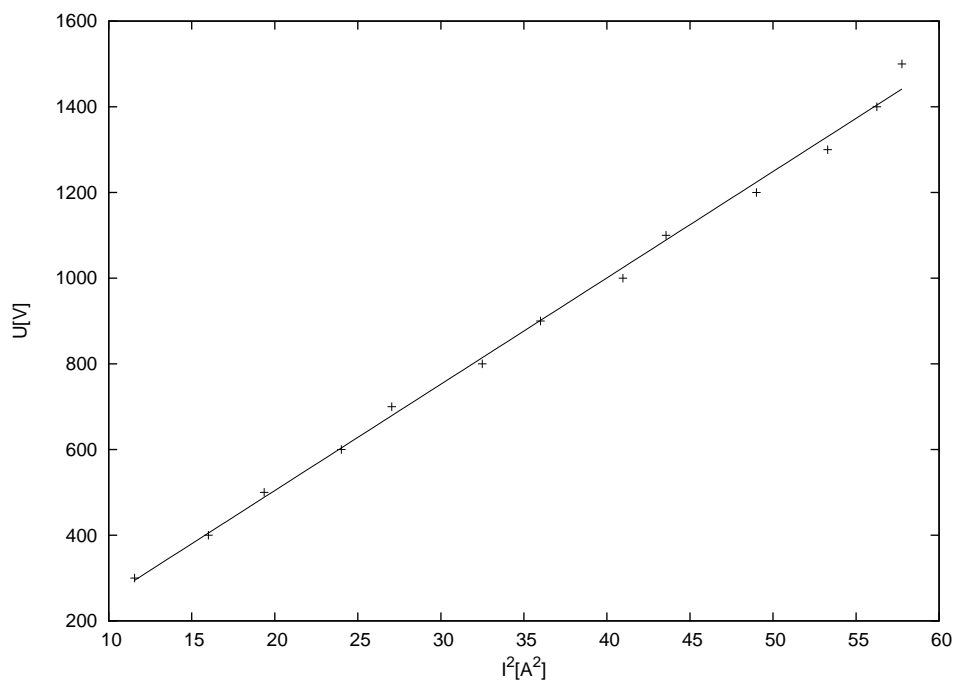
3.2 Metoda pól poprzecznych

W tabeli 3.2 zestawiono wartości pomiarów napięcia i prądu dla kompensujących się (dających łączne zerowe wychylenie plamki) pól elektrycznych i magnetycznych. Dla każdego z pomiarów wyliczono prędkość elektronów ze wzoru

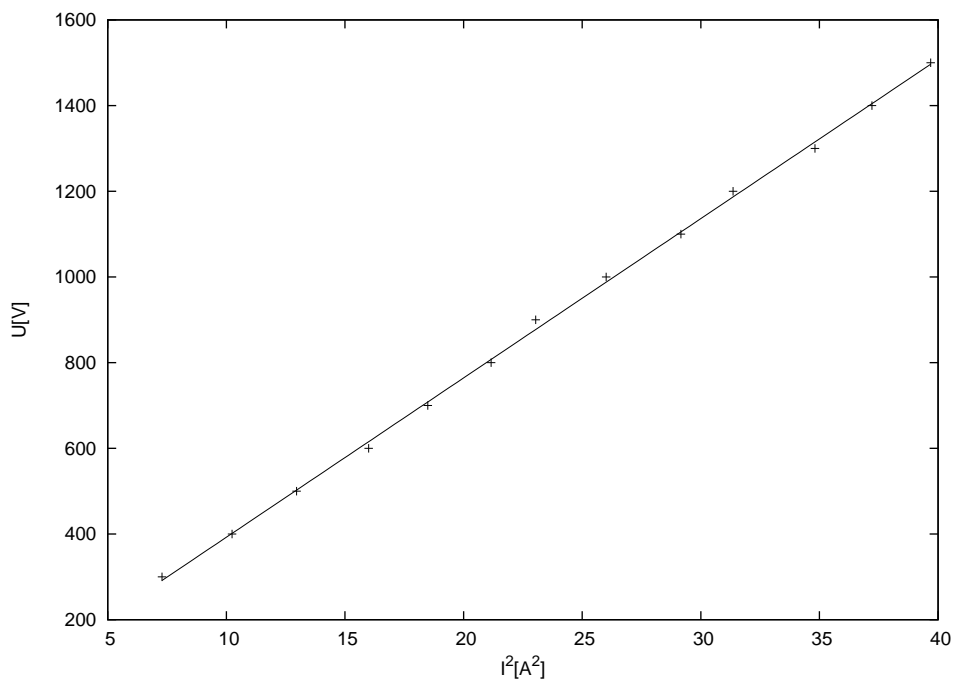
$$v = \frac{E}{B} = \frac{5\sqrt{5}RU}{16dzi_0\mu_0} \qquad (3.9)$$

U [V]	i_1 [A]	i_2 [A]	$(e/m)_1$ [10^{11} C/kg]	$(e/m)_2$ [10^{11} C/kg]
300	3,4	2,7	1,627	1,708
400	4,0	3,2	1,567	1,622
500	4,4	3,6	1,619	1,602
600	4,9	4,0	1,567	1,557
700	5,2	4,3	1,623	1,572
800	5,7	4,6	1,544	1,569
900	6,0	4,8	1,567	1,622
1000	6,4	5,1	1,531	1,596
1100	6,6	5,4	1,583	1,566
1200	7,0	5,6	1,535	1,589
1300	7,3	5,9	1,529	1,550
1400	7,5	6,1	1,560	1,562
1500	7,6	6,3	1,628	1,569

Tabela 3.1: Wyniki pomiarów i wyliczone wartości e/m dla metody pola podłużnego.



Rysunek 3.1: Wykres zależności $U(I^2)$ dla pierwszej pary płytek w metodzie pola podłużnego wraz z prostą regresji.



Rysunek 3.2: Wykres zależności $U(I^2)$ dla drugiej pary płytek w metodzie pola podłużnego wraz z prostą regresji.

$Y[\text{mm}]$	$U[\text{V}]$	$I[\text{mA}]$	$v[10^6 \text{ m/s}]$
+20	42,0	56,5	7,95
+15	32,0	40,5	8,45
+10	22,0	26,0	9,05
+5	11,5	13,0	9,50
-5	10,5	12,0	9,37
-10	20,5	24,0	9,13
-15	32,5	37,0	9,39
-20	44,0	49,5	9,50

Tabela 3.2: Wyniki pomiarów napięcia i prądu dla kompensujących się pól elektrycznych i magnetycznych, wraz z wyliczonymi prędkościami elektronów.

Y_E [mm]	U [V]	e/m [10^{11} C/kg]
+20	43,0	1,635
+15	32,0	1,647
+10	21,0	1,674
+5	10,0	1,757
-5	10,5	1,674
-10	22,0	1,597
-15	33,5	1,574
-20	45,5	1,544

Tabela 3.3: Wyniki pomiarów napięcia dla odchyień elektronów w polu elektrycznym, wraz z wyliczonymi wartościami stosunku e/m .

Y_B [mm]	I [mA]	e/m [10^{11} C/kg]
+20	50,5	1,647
+15	38,5	1,620
+10	26,0	1,599
+5	12,5	1,663
-5	12,0	1,733
-10	24,0	1,733
-15	37,0	1,686
-20	49,0	1,697

Tabela 3.4: Wyniki pomiarów prądu dla odchyień elektronów w polu magnetycznym, wraz z wyliczonymi wartościami stosunku e/m .

Średnia wartość prędkości to

$$\bar{v} = 9,04(17) \times 10^6 \text{ m/s} \quad (3.10)$$

Tę wartość prędkości elektronów przyjmujemy do dalszych wyliczeń zgodnie z wzorami

$$\frac{e}{m} = \frac{Y_E v^2}{EK_E} = \frac{Y_B v}{BK_B} \quad (3.11)$$

W tabelach 3.3, 3.4 zestawiono odpowiednio wartości pomiarów napięcia/prądu dla odchyień elektronów w polu elektrycznym/magnetycznym, wraz z wyliczonymi zgodnie z powyższymi wzorami wartościami stosunku e/m . Odpowiednie wartości średnie owych stosunków wraz z niepewnościami wynoszą

$$\overline{e/m_E} = 1,638(24) \times 10^{11} \text{ C/kg} \quad (3.12)$$

$$\overline{e/m_B} = 1,672(17) \times 10^{11} \text{ C/kg} \quad (3.13)$$

Rozdział 4

Wnioski

Zestawmy otrzymane różnymi metodami wartości stosunku e/m (PD – pole podłużne, PP – pola poprzeczne):

metoda	wartość [10^{11} C/kg]
PD, 1 para płytek, w. średnia	1,576
PD, 1 para płytek, pr. regresji	1,556
PD, 2 para płytek, w. średnia	1,591
PD, 2 para płytek, pr. regresji	1,544
PP, pole elektryczne	1,638
PP, pole magnetyczne	1,672
w. tablicowa [4]	1,759

Widać, że wszystkie metody dają wyniki zbliżone do tablicowego, jednak zawsze z mniejszym lub większym niedomiarem. Kardynalny wpływ na błędy pomiarów miały: oddziaływanie z zewnętrznymi polami elektrycznymi i magnetycznymi, pominięta w wyprowadzeniach teoretycznych niejednorodność pól, klasa przyrządów pomiarowych, oraz niedokładność określenia położenia plamki na ekranach lamp.

Bibliografia

- [1] S. Frisz, A. Timoriewa, *Kurs fizyki*, tom II, *Zjawiska elektryczne i elektromagnetyczne*, PWN, Warszawa 1965.
- [2] David Halliday, Robert Resnick, *Fizyka dla studentów nauk przyrodniczych i technicznych*, tom II, PWN, Warszawa 1972.
- [3] Henryk Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, PWN, Warszawa 2003.
- [4] *Wikipedia, Wolna Encyklopedia*, praca zbiorowa, <http://en.wikipedia.org>.
- [5] http://www.jeybi.republika.pl/el14_oscyloskop.html.
- [6] <http://www.if.pw.edu.pl/~pluta/pl/dyd/kadd/w6/segment1/main.htm>.
- [7] J. Jukowski, *Instrukcja obsługi stanowiska laboratoryjnego „Wyznaczanie stosunku e/m elektronu metodą Thomsona”*, ZANiD PWr, Wrocław 1977.